Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

vrijdag 1 september 2017, 14:00–18:00

Auditorium L.00.06 (18 studenten)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt	
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt	(d) 3 pt
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 4 pt		
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt		
Vraag 5:	(a) 5 pt	(b) 5 pt		

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)			
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A van X en B van Y geldt

$$A \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(A) \cap B).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere inclusie

$$f^{-1}(f(A) \cap B) \subset A \cap f^{-1}(B)$$

niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) :\; f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 Beschouw de relatie R op de verzameling $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \ldots\}$ die gegeven wordt door $(x, y) \in R$ als en slecht als $xy = m^2$ voor een zekere $m \in \mathbb{N}$.

(a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is.

(b) Geef 3 elementen uit de equivalentieklasse [18].

(c) Is het aantal elementen in [18] eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

(d) Is het aantal equivalentieklassen eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 3 Voor deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}$ is

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

(a) Neem aan dat A en B niet-leeg en naar boven begrensd zijn. Bewijs dat $A + B$ naar boven begrensd is en

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(b) Neem aan dat A open is en B is willekeurig. Bewijs dat $A + B$ open is.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Neem $x > 0$ vast en beschouw de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeven door

$$b_n = \frac{n^2}{(1+xn)(1+2xn)}$$

Gebruik de definitie om te bewijzen dat de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is en bepaal de limiet.

Naam:

Vraag 5 (x_n) is een rij van reële getallen waarvoor geldt dat

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

(a) Bewijs dat geldt

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \forall n \in \mathbb{N}_0 : |x_m - x_n| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| .$$

(b) Bewijs dat de rij (x_n) convergent is.