Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde

vrijdag 26 augustus 2016, 14-18 uur

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 2 pt	(b) 3 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 4 pt	(c) 2 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat
$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$
geldt voor alle $B_1, B_2 \in P(Y)$.

(c) Bewijs dat
$$\forall B_1, B_2 \in P(Y) : \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subset B_2$$
geldt als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Voor een verzameling X noteren we met $\text{Fun}(X, \mathbb{Z})$ de verzameling van alle functies $f : X \to \mathbb{Z}$. Op $\text{Fun}(X, \mathbb{Z})$ definiëren we een relatie R door te stellen dat $(f, g) \in R$ als en slechts als $\{f(x) - g(x) \mid x \in X\}$ een eindige verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is en neem voor f_0 de functie $f_0 : X \to \mathbb{Z} : x \mapsto 0$. Is de equivalentieklasse $[f_0]_R$ van f_0 dan eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar. Motiveer uw antwoord.

(c) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is. Is het aantal equivalentieklassen van R dan eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar? Motiveer uw antwoord.

Naam:

Vraag 3 De rij $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wordt gegeven door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}, \qquad \text{voor } k \geq 2.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat $a_k \geq 3a_{k-1}$ geldt voor elke $k \geq 1$.

(b) Bereken de voortbrengende functie van de rij (a_k). Laat zien dat dit een rationale functie is. Wat is de teller en wat is de noemer?

(c) Gebruik de voortbrengende functie om a_{2016} te berekenen.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij (a_n) van reële getallen.

(b) Bewijs met behulp van de definitie van convergentie dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \frac{n^2 m}{n^2 + m^2}$$

convergent is. Hierin is m een vast gekozen getal.

Naam:

Vraag 5 In deze vraag zijn (a_n) en (b_n) twee begrensde reële rijen.

(a) Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right)$$

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat gelijkheid in onderdeel (a) niet hoeft te gelden.

(c) Neem aan dat bekend is dat de rij (a_n) convergent is. Bewijs dat in dat geval gelijkheid in onderdeel (a) geldt.