Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica

vrijdag 28 augustus 2015, 14-17 uur

Auditorium L.00.06: 18 studenten

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 2 pt	(b) 3 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

geldt voor alle $B \in P(Y)$.

(c) Bewijs dat

$$\forall B \in P(Y) : \quad B = f(f^{-1}(B))$$

geldt als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Zij A een deelverzameling van $\mathbb{R}$. We definiëren een relatie R op A door

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid I(x, y) \subset A\}$$

waarin

$$I(x,y) = \begin{cases} [x,y] & \text{als } x < y, \\ \{x\} & \text{als } x = y, \\ [y,x] & \text{als } x > y. \end{cases}$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op A is.

(b) Bewijs dat elke equivalentieklasse van R ofwel uit één element bestaat, ofwel overaftelbaar is.

(c) Neem aan dat A zodanig is dat er geen equivalentieklassen zijn die uit slechts één element bestaan. Bewijs dat het aantal equivalentieklassen aftelbaar is.

Naam:

Vraag 3 De Fibonaccigetallen worden gedefinieerd door $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ en

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

(a) Bewijs met volledige inductie dat de volgende twee identiteiten gelden voor elke $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} F_{2n-1} &= F_{n-1}^2 + F_n^2, \\ F_{2n} &= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}. \end{aligned}$$

Zij

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$$

de voortbrengende functie van de rij $(F_n/n!)_n$.

(b) Bewijs dat

$$f''(x) = f'(x) + f(x)$$

Kunt u hieruit $f(x)$ en F_n berekenen?