Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

vrijdag 29 januari 2016, 8:30–12:30

Auditorium L.00.07

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 2 pt	(b) 2 pt	(c) 3 pt	(d) 4 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt	
Vraag 3:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt	
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt		
Vraag 5:	(a) 5 pt	(b) 5 pt		

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Neem aan dat $|X| = 2$ en $|Y| = 2016$.

(a) Hoeveel injectieve functies zijn er van X naar Y?

(b) Hoeveel surjectieve functies zijn er van Y naar X?

Bepaal of de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ aftelbaar of overaftelbaar zijn. Motiveer uw antwoord.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\}$

Naam:

Vraag 2 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie.

(a) Neem aan dat B_1 en B_2 deelverzamelingen van Y zijn. Bewijs dat

$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de omgekeerde implicatie

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subset B_2$$

niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall B_1 \in P(Y) : \forall B_2 \in P(Y) : \ f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \iff B_1 \subset B_2$$

geldt als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 3 Voor een verzameling X definiëren we een relatie R op de machtsverzameling $P(X)$ door

$$(A, B) \in R$$

als en slechts als er een functie $f : X \to X$ bestaat waarvoor geldt dat $f(A) = B$.

(a) Is de relatie reflexief, symmetrisch, anti-symmetrisch, transitief?

(b) Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is.

(c) Hoeveel equivalentieklassen heeft $R \cap R^{-1}$ als X een eindige verzameling is met n elementen?

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Gebruik de definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeven door

$$a_n = n\left(\sqrt{p^2+n^2}-n\right)$$

convergent is. Hierin is $p \in \mathbb{R}$ een vast reëel getal. Wat is de limiet?

Naam:

Vraag 5 Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}$.

(a) Neem aan dat $x_n > 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Geldt dan ook $\limsup_{n\to\infty} x_n > 0$?

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Zij $A = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{A}$$

waarin $\overline{A}$ de sluiting is van de verzameling A.