Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

maandag 30 augustus 2021, 13:00–16:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je <u>enkel</u> het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	
Vraag 4:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 40)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)			
Vraag 4 (op 10)			
Totaal (op 40)		EINDCIJFER (op 20)	

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

3pt (a) Bewijs dat voor elke deelverzameling $A \subset X$ geldt

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

2pt (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(f(A)) \subset A$$

niet altijd hoeft te gelden.

5pt (c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \ A = f^{-1}(f(A))$$

als en slechts als f injectief is.

Vraag 2 Zij X een overaftelbare verzameling. Op de verzameling $P(X)$ definiëren we een relatie S door $(A, B) \in S$ als en slechts als $A \setminus B$ een aftelbare verzameling is.

4pt (a) Is S reflexief, symmetrisch, anti-symmetrisch, transitief? Bewijs uw antwoord.

3pt (b) Bewijs dat $R = S \cap S^{-1}$ een equivalentierelatie is.

3pt (c) Hoe groot is de equivalentieklasse $[\emptyset]_R$ van de lege verzameling voor de equivalentierelatie R? Is het een eindige verzameling, een aftelbaar oneindige verzameling, of een overaftelbare verzameling? Motiveer uw antwoord.

Vraag 3

6pt (a) Gebruik de ε-n_0 definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_n$ gegeven door

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$$

convergent is.

4pt (b) Zij A een begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Zij $(x_n)_n$ een reële rij met $x_n \in A$ voor elke n. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{A}$$

waarin $\overline{A}$ de sluiting is van A.

Vraag 4

6pt (a) Neem aan dat A en B niet lege, naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs dat $A \cup B$ naar boven begrensd is en dat

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

4pt (b) We zeggen dat een deelverzameling X van $\mathbb{R}$ de eigenschap $\mathcal{E}$ heeft als

$$\forall x \in X : \forall y \in \mathbb{R} : \quad y \leq x \implies y \in X.$$

Neem aan dat A en B twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn met eigenschap $\mathcal{E}$. Bewijs dat $A \subset B$ of $B \subset A$.