Examen G0U13D Bewijzen en Redeneren II
Bachelor Fysica en Informatica, minor wiskunde

maandag 30 augustus 2021, 13:00–16:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 3 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je enkel het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 6 pt (b) 4 pt

  Vraag 2: (a) 6 pt (b) 4 pt

  Vraag 3: (a) 5 pt (b) 5 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Vraag 3 (op 10)			

Vraag 1

6pt (a) Gebruik de ε-n_0 definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_n$ gegeven door

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$$

convergent is.

4pt (b) Zij A een begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Zij $(x_n)_n$ een reële rij met $x_n \in A$ voor elke n. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{A}$$

waarin $\overline{A}$ de sluiting is van A.

Vraag 2

6pt (a) Neem aan dat A en B niet lege, naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs dat $A \cup B$ naar boven begrensd is en dat

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

4pt (b) We zeggen dat een deelverzameling X van $\mathbb{R}$ de eigenschap $\mathcal{E}$ heeft als

$$\forall x \in X : \forall y \in \mathbb{R} : \quad y \leq x \implies y \in X.$$

Neem aan dat A en B twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn met eigenschap $\mathcal{E}$. Bewijs dat $A \subset B$ of $B \subset A$.

Vraag 3

5pt (a) Neem aan dat $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde functie is (d.w.z. er is een $M \in \mathbb{R}$ met $|F(x)| \leq M$ voor alle $x \in \mathbb{R}$).

Zij $(x_n)_n$ een rij die voldoet aan $x_0 = 0$ en $F(x_n) = x_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de rij $(x_n)_n$ niet noodzakelijk convergent is.

5pt (b) Neem nu aan dat F stijgend is, d.w.z.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \implies F(x) \leq F(y)$$

en ook nog steeds begrensd. Bewijs dat nu wel volgt dat $(x_n)_n$ een convergente rij is.