Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

maandag 31 augustus 2020, 12:00–15:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je enkel het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt
Vraag 3:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 4:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 40)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Totaal (op 40)		EINDCIJFER (op 20)	

Naam:

NOTEER OP DIT BLAD ENKEL HET ANTWOORD OP VRAAG 1

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

3pt (a) Bewijs dat voor een deelverzameling $A \subset X$ geldt

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

2pt (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $f^{-1}(f(A)) \subset A$ niet altijd hoeft te gelden.

5pt (c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \; A = f^{-1}(f(A))$$

als en slechts als f injectief is.

Naam:

NOTEER OP DIT BLAD ENKEL HET ANTWOORD OP VRAAG 2

Vraag 2 De relatie R op $P(\mathbb{N})$ wordt gedefinieerd door $(A, B) \in R$ als en slechts als

$$\forall a \in A : \exists b \in B : a \leq b.$$

4pt (a) Is de relatie R reflexief, symmetrisch, transitief, anti-symmetrisch? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

3pt (b) Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie op $P(\mathbb{N})$ is.

3pt (c) Hoeveel equivalentieklassen heeft de equivalentierelatie uit onderdeel (b)? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig of overaftelbaar veel? Verklaar uw antwoord.

Naam:

NOTEER OP DIT BLAD ENKEL HET ANTWOORD OP VRAAG 3

Vraag 3

3pt (a) De rij $(a_n)_n$ wordt gegeven door

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Bewijs dat de rij $(a_n)_n$ begrensd is

3pt (b) Onderzoek of de rij $(a_n)_n$ convergent is. Bewijs uw antwoord.

4pt (c) De ongelijkheid $4^n \leq 11 \cdot n!$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Bewijs dit behulp van volledige inductie.

Naam:

NOTEER OP DIT BLAD ENKEL HET ANTWOORD OP VRAAG 4

Vraag 4 Gegeven zijn twee begrensde reële rijen (x_n) en (y_n). Definieer

$$a_n = \begin{cases} x_n & \text{als } n \text{ even is,} \\ y_n & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

4pt (a) Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \max\left\{\limsup_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} y_n\right\}.$$

2pt (b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid niet hoeft te gelden.

4pt (c) Neem nu aan dat de twee rijen (x_n) en (y_n) convergent zijn. Bewijs dat dan

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max\left\{\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right\}.$$