

Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor 1ste fase Wiskunde

vrijdag 31 januari 2014, 8:30–12:30

Auditorium L.00.07

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1: (a) 4 pt (b) 6 pt

Vraag 2: 10 pt (5pt voor elke implicatie)

Vraag 3: (a) 6 pt (b) 2 pt (c) 2 pt

Vraag 4: (a) 2 pt (b) 8 pt

Vraag 5: (a) 2 pt (b) 4 pt (c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 (a) De rij van Fibonacci-getallen wordt gegeven door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}_0$$

Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=0}^n a_k^2 = a_n a_{n+1}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Laat zien dat de rij (b_n) met $b_n = a_{2n+1}$ voldoet aan de recursierelatie

$$b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1}$$

en bereken de voortbrengende functie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Antwoord 1 (a) Beginstap: Voor $n = 0$ is de bewering dat $a_0^2 = a_0 a_1$. Dit is juist want $a_0 = 0$, zodat beide leden gelijk aan 0 zijn. De bewering geldt dus voor $n = 0$.

Inductiestap: Neem $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en veronderstel dat de bewering juist is voor

n . We nemen dus aan dat $\sum_{k=0}^n a_k^2 = a_n a_{n+1}$.

Dan is

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k^2 = \sum_{k=0}^n a_k^2 + a_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2.$$

Het rechterlid is $a_{n+1}(a_n + a_{n+1})$ en vanwege de recursierelatie voor de Fibonacci-getallen is dit gelijk aan $a_{n+1} a_{n+2}$. We vinden dat

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k^2 = a_{n+1} a_{n+2}$$

en hiermee is de bewering bewezen voor $n + 1$.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt dat de bewering geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$, vanwege het principe van volledige inductie.

(b) Omdat $b_{n+1} = a_{2n+3}$ geldt vanwege de recursierelatie voor de Fibonnaci-getallen dat

$$b_{n+1} = a_{2n+2} + a_{2n+1} = a_{2n+2} + b_n$$

We passen nogmaals de recursierelatie toe en we vinden

$$b_{n+1} = a_{2n+1} + a_{2n} + b_n = b_n + a_{2n} + b_n = 2b_n + a_{2n}.$$

Het is nu de bedoeling om a_{2n} te herschrijven tot een uitdrukking waarin alleen a_k 's met k oneven voorkomen. Dit kan omdat we de recursie $a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}$ kunnen omvormen tot

$$a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n-1}.$$

Dus $a_{2n} = b_n - b_{n-1}$ en we vinden

$$b_{n+1} = 2b_n + b_n - b_{n-1} = 3b_n - b_{n-1},$$

zoals gevraagd was.

Merk op dat $b_0 = a_1 = 1$ en $b_1 = a_3 = 2$. Er geldt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$$

Voor $n \geq 2$ gebruiken we $b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}$. Dus

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (3b_{n-1} - b_{n-2})x^n \\ &= 1 + 2x + 3 \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2}x^n. \end{aligned} \tag{1}$$

De twee reeksen in (1) bekijken we afzonderlijk. Er geldt

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1}x^n &= b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4 + \dots = x(b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots) \\ &= x(f(x) - b_0) = x(f(x) - 1), \end{aligned}$$

want $b_0 = 1$, en

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2}x^n &= b_0x^2 + b_1x^3 + b_2x^4 + \dots = x^2(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \\ &= x^2f(x) \end{aligned}$$

Dit gebruiken we in (1) en er volgt

$$f(x) = 1 + 2x + 3x(f(x) - 1) - x^2 f(x)$$

Breng hierin alle termen met $f(x)$ naar links:

$$f(x) - 3xf(x) + x^2 f(x) = 1 + 2x - 3x = 1 - x$$

De linkerkant is $f(x)(1 - 3x + x^2)$. Na deling door $1 - 3x + x^2$ vinden we

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - 3x + x^2}$$

en dit is bijgevolg de voortbrengende functie van de rij (b_n) .

Het is mogelijk om uit de voortbrengende functie een expliciete formule voor de getallen b_n te vinden, maar dit was niet gevraagd in de opgave.

Naam:

Vraag 2 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \rightarrow Y$ een functie. We definiëren $F : P(Y) \rightarrow P(X)$ door

$$F(B) = f^{-1}(B), \quad \text{voor } B \in P(Y).$$

Bewijs dat F injectief is als en slechts als f surjectief is.

Antwoord 2 We bewijzen twee implicaties.

Bewijs van: F is injectief $\Rightarrow f$ is surjectief Veronderstel dat F injectief is. Neem $y \in Y$ willekeurig. Dan zijn $\{y\}$ en $\emptyset$ twee verschillende elementen van $P(Y)$. Omdat F injectief is geldt er

$$F(\{y\}) \neq F(\emptyset)$$

Vanwege de definitie van F is dus

$$f^{-1}(\{y\}) \neq f^{-1}(\emptyset).$$

Het is duidelijk dat $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ en $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Dus

$$\{x \in X \mid f(x) = y\} \neq \emptyset.$$

Er is dus een $x \in X$ met $f(x) = y$. Omdat $y \in Y$ willekeurig gekozen was betekent dit dat f surjectief is. De eerste implicatie is nu bewezen.

Bewijs van: f is surjectief $\Rightarrow F$ is injectief We veronderstellen nu dat f surjectief is. Om te bewijzen dat F injectief is, nemen we $B_1, B_2 \in P(Y)$ met $F(B_1) = F(B_2)$. Het is de bedoeling om te bewijzen dat $B_1 = B_2$. We moeten gelijkheid van twee verzamelingen aantonen en dit gaan we doen door twee inclusies aan te tonen, nl. $B_1 \subset B_2$ en $B_2 \subset B_1$.

Neem $y \in B_1$ willekeurig. Omdat f surjectief is, bestaat er een $x \in X$ met $f(x) = y$. Dan geldt $f(x) \in B_1$, en dus $x \in f^{-1}(B_1)$. Vanwege de definitie van F is dan $x \in F(B_1)$. Uit de gelijkheid $F(B_1) = F(B_2)$ volgt dan $x \in F(B_2) = f^{-1}(B_2)$. Dit betekent $f(x) \in B_2$. Omdat $y = f(x)$ zien we dat $y \in B_2$. Dit levert ons de inclusie $B_1 \subset B_2$.

De andere inclusie $B_2 \subset B_1$ volgt op precies dezelfde manier, en we concluderen dat $B_1 = B_2$.

Uit $F(B_1) = F(B_2)$ volgt dus dat $B_1 = B_2$ en dit betekent dat F injectief is. De tweede implicatie is nu ook bewezen.

Naam:

Vraag 3 Zij X en Y twee niet-lege verzamelingen. Met $\text{Fun}(X, Y)$ noteren we de verzameling van alle functies $f : X \rightarrow Y$. Zij R de relatie op $\text{Fun}(X, Y)$ gedefinieerd door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er bijecties $\sigma : X \rightarrow X$ en $\tau : Y \rightarrow Y$ bestaan met

$$f \circ \sigma = \tau \circ g$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\text{Fun}(X, Y)$ is.

[N.B.: Algemene eigenschappen van bijecties mag u gebruiken zonder bewijs.]

(b) Neem aan dat $|X| = 4$ en $|Y| = 3$. Geef twee functies $f, g \in \text{Fun}(X, Y)$ die niet equivalent zijn onder de equivalentierelatie R . Beargumenteer uw antwoord.

(c) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er als $|X| = 4$ en $|Y| = 3$? Geef één element van elke equivalentieklasse.

Antwoord 3 (a) We moeten laten zien dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Bewijs dat R reflexief is: Neem $f \in \text{Fun}(X, Y)$ willekeurig. De eenheidsfuncties I_X en I_Y zijn bijecties en er geldt $f \circ I_X = f$ en $I_Y \circ f = f$. Dus $f \circ I_X = I_Y \circ f$. Er zijn dus bijecties σ en τ met $f \circ \sigma = \tau \circ f$, namelijk $\sigma = I_X$ en $\tau = I_Y$. Dit betekent dat $(f, f) \in R$. De relatie is dus reflexief.

Bewijs dat R symmetrisch is: Neem $f, g \in \text{Fun}(X, Y)$ willekeurig en veronderstel dat $(f, g) \in R$. Er zijn dan bijecties σ en τ met $f \circ \sigma = \tau \circ g$. Omdat σ en τ bijecties zijn, zijn ze ook inverseerbaar. De inverse functies σ^{-1} en τ^{-1} bestaan dus, en dit zijn ook bijecties. We stellen $\tau \circ g = f \circ \sigma$ samen met τ^{-1} van links en met σ^{-1} van rechts. Dan volgt

$$\tau^{-1} \circ \tau \circ g \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1}.$$

Vanwege associativiteit hoeven we hier geen haakjes te plaatsen. Ook geldt $\tau^{-1} \circ \tau = I_Y$ en $\sigma \circ \sigma^{-1} = I_X$. De eenheidsfuncties kunnen we weglaten en er volgt

$$g \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1} \circ f.$$

Omdat σ^{-1} en τ^{-1} bijecties zijn, volgt nu dat $(g, f) \in R$. De relatie is dus symmetrisch.

Bewijs dat R transitief is: Neem $f, g, h \in \text{Fun}(X, Y)$ willekeurig en veronderstel dat $(f, g) \in R$ en $(g, h) \in R$. Er zijn dan bijecties σ_1, σ_2 op X en τ_1, τ_2 op Y zodat

$$f \circ \sigma_1 = \tau_1 \circ g, \quad \text{en} \quad g \circ \sigma_2 = \tau_2 \circ h.$$

Neem $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ en $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$. Dit zijn bijecties en er geldt

$$\begin{aligned} f \circ \sigma &= f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \tau_1 \circ g \circ \sigma_2 \\ &= \tau_1 \circ \tau_2 \circ h = \tau \circ h. \end{aligned}$$

Dus $(f, h) \in R$. De relatie is transitief.

- (b) Stel $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ en $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Twee functies f en g die niet equivalent zijn zijn bijvoorbeeld

$$f : X \rightarrow Y : x \mapsto f(x) = y_1 \quad \text{voor elke } x \in X$$

en

$$g : X \rightarrow Y : x \mapsto g(x) = \begin{cases} y_1 & \text{als } x = x_1 \text{ of } x = x_2 \\ y_2 & \text{als } x = x_3 \\ y_3 & \text{als } x = x_4 \end{cases}$$

Als f en g equivalent zouden zijn, dan $f \circ \sigma = \tau \circ g$ voor zekere bijecties σ en τ , en dan zou $g = \tau^{-1} \circ f \circ \sigma$.

De functie $\tau^{-1} \circ f \circ \sigma$ beeldt elke $x \in X$ af op $\tau^{-1}(y_1)$. Deze functie is bijgevolg constant. g is echter niet een constante functie, zodat g en $\tau^{-1} \circ f \circ \sigma$ niet gelijk kunnen zijn. Bijgevolg zijn f en g niet equivalent onder de equivalentierelatie R .

- (c) Er zijn 4 equivalentieklassen. Ten eerste zijn er de constante functies waarvan de functie f uit onderdeel (b) een voorbeeld is.

Ten tweede zijn er de surjectieve functies, zoals g uit onderdeel (b). Hier is er een waarde y_j in Y die twee keer aangenomen wordt als beeld van een element uit X en de andere elementen van Y komen 1 keer voor als beeld.

Er blijven dan nog de functies over met twee beelden. Dus functies $h : X \rightarrow Y$ met $|h(X)| = 2$. Hierbinnen zijn nog twee equivalentieklassen te onderscheiden, namelijk functies waarbij een y_j in Y drie keer als beeld voorkomt, zoals bij

$$h : X \rightarrow Y : x \mapsto h(x) = \begin{cases} y_1 & \text{als } x = x_1 \text{ of } x = x_2 \text{ of } x = x_3 \\ y_2 & \text{als } x = x_4 \end{cases}$$

en functies waarbij twee waarden in Y elk twee keer als beeld voorkomen, zoals bij

$$k : X \rightarrow Y : x \mapsto k(x) = \begin{cases} y_1 & \text{als } x = x_1 \text{ of } x = x_2 \\ y_2 & \text{als } x = x_3 \text{ of } x = x_4 \end{cases}$$

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie

$$f_n : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f_n(x) = \frac{1 + nx + n^2}{1 + n^2x}$$

Bewijs met behulp van de definitie dat de rij $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent is voor elke $x > 0$.

Antwoord 4 (a) Een rij reële getallen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is convergent als

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon.$$

In woorden betekent dit: Er is een reëel getal L (de limiet van de rij) zodanig dat voor elke $\varepsilon > 0$ er een index $n_0 \in \mathbb{N}_0$ te vinden is zodanig dat a_n minder dan ε van L verschilt voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$.

(b) Laat $x > 0$. We laten zien dat $(f_n(x))_n$ convergent is met limiet $L = \frac{1}{x}$.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $n_0 \in \mathbb{N}$ met

$$n_0 \geq \max \left\{ 1, \frac{1}{x^2}, \frac{1+x}{x\varepsilon} \right\}.$$

Vanwege de Archimedische eigenschap van reële getallen is het zeker mogelijk om zo'n natuurlijk getal te kiezen. Kies $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt $n \geq 1$, $n \geq \frac{1}{x^2}$ en $n \geq \frac{1+x}{x\varepsilon}$.

We berekenen nu eerst $f_n(x) - \frac{1}{x}$. Er geldt

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{1}{x} &= \frac{1 + nx + n^2}{1 + n^2x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x(1 + nx + n^2) - (1 + n^2x)}{x(1 + n^2x)} \\ &= \frac{x + nx^2 - 1}{x + n^2x^2} \end{aligned}$$

Omdat $n \geq \frac{1}{x^2}$ is de teller $x + nx^2 - 1 > 0$. De noemer is ook > 0 . Dus geldt

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{x} \right| = \frac{x + nx^2 - 1}{x + n^2x^2} \quad (2)$$

Omdat $x + nx^2 - 1 < x + nx^2$ en $x + n^2x^2 > n^2x^2$ en alle uitdrukkingen zijn strikt positief, volgt uit (2) dat

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{x} \right| < \frac{x + nx^2}{n^2x^2} = \frac{1 + nx}{n^2x} \quad (3)$$

We weten dat $n \geq 1$ zodat $1 + nx \leq n + nx$. Uit (3) volgt dan vervolgens

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{x} \right| < \frac{n + nx}{n^2 x} = \frac{1 + x}{nx} \quad (4)$$

Nu merken we op dat $n \geq \frac{1+x}{x\varepsilon}$, hetgeen ook geschreven kan worden als

$$nx\varepsilon \geq 1 + x,$$

omdat $x > 0$ en $\varepsilon > 0$. Dan ook $\frac{1+x}{nx} \leq \varepsilon$, en als we dit combineren met (4) dan vinden we

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{x} \right| < \varepsilon. \quad (5)$$

Hiermee is bewezen dat $(f_n(x))_n$ convergeert naar $\frac{1}{x}$, vanwege de definitie van convergentie van een reële rij.

Naam:

Vraag 5 Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is.

- (a) Geef de definitie van het supremum $\sup(A)$ van A .
- (b) Neem aan dat (x_n) een rij is met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup(A).$$

- (c) Bewijs dat er een convergente rij (x_n) met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, bestaat met limiet gelijk aan $\sup(A)$.

Antwoord 5 (a) Het supremum van A is de kleinste bovengrens van A . Dus $s = \sup(A)$ als en slechts als s een bovengrens is van A , en als voor elke bovengrens b van A geldt dat $s \leq b$. In kwantoren betekent dit

$$(\forall x \in A : x \leq s) \wedge (\forall b \in \mathbb{R} : [\forall x \in A : x \leq b \Rightarrow s \leq b])$$

- (b) Zij $s = \sup(A)$. Volgens de definitie van $\limsup$ geldt dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{met} \quad y_n = \sup\{x_m \mid m \geq n\}.$$

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $\{x_m \mid m \geq n\} \subset A$ want alle elementen van de rij (x_n) behoren tot A . Dan geldt ook voor de suprema $\sup\{x_m \mid m \geq n\} \subset \sup(A)$, ofwel

$$y_n \leq s$$

Deze ongelijkheid geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$. We weten uit de theorie dat de rij (y_n) convergent is met limiet gelijk aan $\limsup x_n$. De niet-strikte ongelijkheid blijft behouden in de limiet. Dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq s$$

en dit betekent precies dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup(A).$$

- (c) We schrijven weer $s = \sup(A)$. We gaan een rij (x_n) in A construeren die convergeert naar S . Kies $x_0 \in A$ willekeurig. Voor $n \in \mathbb{N}_0$ gaan we x_n als volgt kiezen. Omdat s de kleinste bovengrens van A is, is $s - \frac{1}{n}$ geen bovengrens van A . Bijgevolg is er een element van A dat groter is dan $s - \frac{1}{n}$. We kiezen zo'n element en noemen het x_n . De rij (x_n) die we zo krijgen behoort tot de verzameling A . Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dan

$$s - \frac{1}{n} \leq x_n \leq s \tag{6}$$

De tweede ongelijkheid geldt omdat $x_n \in A$ en $s = \sup(A)$.

We gebruiken nu de insluitstelling. Het is duidelijk dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (s - \frac{1}{n}) = s$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} s = s$.

Dan volgt uit (6) en de insluitstelling dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$$

en dit is hetgeen we moesten bewijzen.