Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor 1ste fase Fysica

vrijdag 31 januari 2014, 8:30–11:30

Auditorium M.00.07

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	
Vraag 2:	10 pt	(5pt voor elke implicatie)	
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 (a) De rij van Fibonacci-getallen wordt gegeven door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}_0$$

Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = a_n a_{n+1}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Laat zien dat de rij (b_n) met $b_n = a_{2n+1}$ voldoet aan de recursierelatie

$$b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1}$$

en bereken de voortbrengende functie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Naam:

Vraag 2 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie. We definiëren $F : P(Y) \to P(X)$ door

$$F(B) = f^{-1}(B), \qquad \text{voor } B \in P(Y).$$

Bewijs dat F injectief is als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 3 Zij X en Y twee niet-lege verzamelingen. Met $\mathrm{Fun}(X, Y)$ noteren we de verzameling van alle functies $f : X \to Y$. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X, Y)$ gedefinieerd door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er bijecties $\sigma : X \to X$ en $\tau : Y \to Y$ bestaan met

$$f \circ \sigma = \tau \circ g$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X, Y)$ is.

[N.B.: Algemene eigenschappen van bijecties mag u gebruiken zonder bewijs.]

(b) Neem aan dat $|X| = 4$ en $|Y| = 3$. Geef twee functies $f, g \in \mathrm{Fun}(X, Y)$ die niet equivalent zijn onder de equivalentieklasse R. Beargumenteer uw antwoord.

(c) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er als $|X| = 4$ en $|Y| = 3$? Geef één element van elke equivalentieklasse.