Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor 1ste fase Wiskunde

vrijdag 31 januari 2014, 8:30–12:30

Auditorium L.00.07

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	
Vraag 2:	10 pt	(5pt voor elke implicatie)	
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 2 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 (a) De rij van Fibonacci-getallen wordt gegeven door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}_0$$

Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = a_n a_{n+1}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Laat zien dat de rij (b_n) met $b_n = a_{2n+1}$ voldoet aan de recursierelatie

$$b_{n+1} = 3b_n - b_{n-1}$$

en bereken de voortbrengende functie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Naam:

Vraag 2 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie. We definiëren $F : P(Y) \to P(X)$ door

$$F(B) = f^{-1}(B), \qquad \text{voor } B \in P(Y).$$

Bewijs dat F injectief is als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 3 Zij X en Y twee niet-lege verzamelingen. Met $\mathrm{Fun}(X,Y)$ noteren we de verzameling van alle functies $f : X \to Y$. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X,Y)$ gedefinieerd door

$$(f,g) \in R$$

als en slechts als er bijecties $\sigma : X \to X$ en $\tau : Y \to Y$ bestaan met

$$f \circ \sigma = \tau \circ g$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X,Y)$ is.

[N.B.: Algemene eigenschappen van bijecties mag u gebruiken zonder bewijs.]

(b) Neem aan dat $|X| = 4$ en $|Y| = 3$. Geef twee functies $f, g \in \mathrm{Fun}(X,Y)$ die niet equivalent zijn onder de equivalentieklasse R. Beargumenteer uw antwoord.

(c) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er als $|X| = 4$ en $|Y| = 3$? Geef één element van elke equivalentieklasse.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie

$$f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto f_n(x) = \frac{1 + nx + n^2}{1 + n^2 x}$$

Bewijs met behulp van de definitie dat de rij $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is voor elke $x > 0$.

Naam:

Vraag 5 Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is.

(a) Geef de definitie van het supremum $\sup(A)$ van A.

(b) Neem aan dat (x_n) een rij is met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \sup(A).$$

(c) Bewijs dat er een convergente rij (x_n) met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, bestaat met limiet gelijk aan $\sup(A)$.