Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

donderdag 31 januari 2019, 8:30–12:30

Auditorium G.00.06 (57 studenten)

B.01.05 (4 studenten met faciliteiten: 8:30-13:50)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 4 pt	(c) 2 pt
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A \subset X$ en $B \subset Y$ geldt

$$A \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(A) \cap B).$$

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(f(A) \cap B) \subset A \cap f^{-1}(B)$$

niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \; f^{-1}(f(A) \cap B) \subset A \cap f^{-1}(B)$$

als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 Neem aan dat de functie $f : X \to X$ voldoet aan $f \circ f \circ f = I_X$ waarin I_X de eenheidsfunctie op X is.

(a) Bewijs dat f een bijectie is.

We definiëren een relatie R op X door

$$(x, y) \in R \iff x = y \quad \text{of} \quad y = f(x) \quad \text{of } x = f(y).$$

(b) Toon aan dat R een equivalentierelatie is.

(c) Hoeveel elementen kunnen er in een equivalentieklasse van de equivalentierelatie R zitten?

Naam:

Vraag 3 Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een contractie op $A \subset \mathbb{R}$ als

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x \in A \implies f(x) \in A) \quad \wedge \\ (\exists c \in [0,1[: \forall x \in A : \forall y \in A : |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|)$$

(a) Schrijf de ontkenning van de bewering dat f een contractie op A is uit in kwantoren zonder de negatie $\neg$ te gebruiken.

Zij $B \subset \mathbb{R}$ open en niet-leeg.

(b) Bewijs dat B overaftelbaar is.

(c) Bewijs dat B equipotent is met $\mathbb{R}$.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Gebruik de definitie om te bewijzen dat de rij $(a_n)_n$ waarbij

$$a_n = \frac{\sin(n) + 3n^2\sqrt{n^2+1}}{n^3+1}$$

convergent is.

Naam:

Vraag 5 Gegeven zijn twee begrensde reële rijen $(x_n)_n$ en $(y_n)_n$. We nemen

$$a_n = \min\{x_n, y_n\}$$

(a) Bewijs dat
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min\{\liminf_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} y_n\}.$$

(b) Welke van de volgende uitspraken zijn waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \min\{\limsup_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} y_n\} \tag{1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max\{\limsup_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} y_n\} \tag{2}$$