Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren, 3sp variant
Bachelor Fysica

vrijdag 3 februari 2017, 8:30–11:30

Auditorium M.00.07 (80 studenten)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
  Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt
  Vraag 2: (a) 3 pt (b) 4 pt (c) 3 pt
  Vraag 3: (a) 6 pt (b) 4 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Totaal (op 30)		EINDCIJFER	

Naam:

Vraag 1 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A en B van X geldt

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere inclusie

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reële getallen

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \; k \geq n \implies |a_k - a_n| < \varepsilon$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) X is een eindige verzameling met $|X| = n$. Hoeveel surjectieve functies

$$f : P(X) \to X$$

zijn er met de eigenschap dat

$$\forall x \in X : \{x\} \in f^{-1}(x) \quad ?$$

Motiveer uw antwoord.

(c) De getallen x_n voldoen aan $x_0 = 0$

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

waarin $c > 0$ een vast gekozen getal is.

Bewijs met volledige inductie dat $x_{n+1} > x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Naam:

Vraag 3 Zij X een verzameling. Voor twee functies $f : X \to X$ en $g : X \to X$ definiëren we de "verschilverzameling" door

$$V(f, g) = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

We definiëren vervolgens een relatie R op de verzameling $\mathrm{Fun}(X, X)$ van alle functies van X naar X door $(f, g) \in R$ als en slechts als $V(f, g)$ een aftelbare verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X, X)$ is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er in het geval dat X aftelbaar oneindig is? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel?

Opmerking: Algemene eigenschappen van aftelbare verzameling mag u zonder bewijs gebruiken. U moet wel duidelijk formuleren welke eigenschap u gebruikt.