Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

vrijdag 3 februari 2017, 8:30–12:30

Auditorium L.00.07 (67 studenten)

Auditorium M.00.07 (3 studenten met faciliteiten)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3 pt
Vraag 3:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 5 pt	(b) 5 pt	

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 Zij X en Y niet-lege verzamelingen en $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen A en B van X geldt

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere inclusie

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reële getallen

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \; k \geq n \implies |a_k - a_n| < \varepsilon$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) X is een eindige verzameling met $|X| = n$. Hoeveel surjectieve functies

$$f : P(X) \to X$$

zijn er met de eigenschap dat

$$\forall x \in X : \{x\} \in f^{-1}(x) \quad ?$$

Motiveer uw antwoord.

(c) Neem aan dat A en B gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs dat $A \cup B$ ook gesloten is.

Naam:

Vraag 3 Zij X een verzameling. Voor twee functies $f : X \to X$ en $g : X \to X$ definiëren we de "verschilverzameling" door

$$V(f, g) = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

We definiëren vervolgens een relatie R op de verzameling $\mathrm{Fun}(X, X)$ van alle functies van X naar X door $(f, g) \in R$ als en slechts als $V(f, g)$ een aftelbare verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X, X)$ is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er in het geval dat X aftelbaar oneindig is? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel?

Opmerking: Algemene eigenschappen van aftelbare verzameling mag u zonder bewijs gebruiken. U moet wel duidelijk formuleren welke eigenschap u gebruikt.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is de functie $f_n : [0, \infty[\to [0, \infty[$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{n + x + \cos(n)}.$$

Neem voor $x \geq 0$ een vast positief reëel getal.

Gebruik de definitie om te bewijzen dat de rij $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent is.

Naam:

Vraag 5 Gegeven is een begrensde rij (x_n) van reële getallen. We nemen

$$a_n = x_{3n}, \qquad b_n = x_{3n+1} \quad \text{en} \quad c_n = x_{3n+2}$$

voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bewijs dat
$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

(b) Neem aan dat (a_n), (b_n) en (c_n) alle drie convergent zijn met dezelfde limiet. Bewijs dat daaruit volgt dat de rij (x_n) convergent is.