Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica

donderdag 5 september 2019, 14:00 – 17:00

Auditorium L.00.06 (35 studenten)

Auditorium L.00.06 (1 student met faciliteiten: 14–18 uur)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

  Vraag 1: (a) 1 pt (b) 3 pt (c) 6 pt

  Vraag 2: (a) 6 pt (b) 4 pt

  Vraag 3: (a) 3 pt (b) 3 pt (c) 4 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 30)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat voor deelverzamelingen B_1 en B_2 van Y geldt dat

$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

(c) Bewijs dat

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subset B_2$$

voor alle $B_1 \in P(Y)$ en $B_2 \in P(Y)$ geldt, als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Voor verzamelingen X en Y noteren we met $\mathrm{Fun}(X, Y)$ de verzameling van alle functies $f : X \to Y$. Op $\mathrm{Fun}(X, Y)$ definiëren we een relatie R door te stellen dat $(f, g) \in R$ als en slechts als er een bijectie $\sigma : Y \to Y$ bestaat waarvoor

$$\{x \in X \mid f(x) \neq (\sigma \circ g)(x)\}$$

een **eindige** verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is en dat $Y = \{0, 1\}$. Dan is elk van de equivalentieklassen van R een aftelbaar oneindige verzameling (dit hoeft u niet te bewijzen).

Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel. Motiveer uw antwoord.

Naam:

Vraag 3 (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij $(a_n)_n$ van reële getallen.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : (k \geq n \wedge m \geq k) \implies |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) Zij $n \in \mathbb{N}$ en X een eindige verzameling met $|X| = n$. Hoeveel functies

$$f : X \to P(X) \setminus \{\emptyset\}$$

zijn er met de eigenschap dat

$$\forall x \in X : \forall y \in X : x \neq y \implies f(x) \cap f(y) = \emptyset \quad ?$$

Motiveer uw antwoord.

(c) De getallen a_n voldoen aan $a_0 = 0$ en voor zekere $c > 0$ aan

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$$

voor $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs met volledige inductie dat $a_{n+1} > a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.