Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN

donderdag 5 september 2019, 14:00–18:00

Auditorium L.00.06 (23 studenten)

Auditorium L.00.06 (3 studenten met faciliteiten: 14:00-19:20)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 1 pt	(b) 3 pt	(c) 6 pt
Vraag 2:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	
Vraag 3:	(a) 5 pt	(b) 3 pt	(c) 2 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 2 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat voor deelverzamelingen B_1 en B_2 van Y geldt dat

$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

(c) Bewijs dat

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subset B_2$$

voor alle $B_1 \in P(Y)$ en $B_2 \in P(Y)$ geldt, als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Voor verzamelingen X en Y noteren we met $\mathrm{Fun}(X, Y)$ de verzameling van alle functies $f : X \to Y$. Op $\mathrm{Fun}(X, Y)$ definiëren we een relatie R door te stellen dat $(f, g) \in R$ als en slechts als er een bijectie $\sigma : Y \to Y$ bestaat waarvoor

$$\{x \in X \mid f(x) \neq (\sigma \circ g)(x)\}$$

een **eindige** verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is en dat $Y = \{0, 1\}$. Dan is elk van de equivalentieklassen van R een aftelbaar oneindige verzameling (dit hoeft u niet te bewijzen).

Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel. Motiveer uw antwoord.

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat A en B niet-lege begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren

$$A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}.$$

(a) Bewijs dat $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

(b) Neem aan dat B open is. Bewijs dat $A - B$ open is.

(c) Neem aan dat B gesloten is. Volgt hieruit dat $A - B$ gesloten is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een reële rij $(a_n)_n$.

(b) Bewijs aan de hand van de definitie dat de rij $(a_n)_n$ met

$$a_n = \frac{2n - \sqrt{n^2+1}}{n + \cos(n)}$$

convergent is. Wat is de limiet?

Naam:

Vraag 5 In deze opgave is $(x_n)_n$ een reële rij.

(a) Formuleer de uitspraak dat de reële rij (x_n) **geen** Cauchyrij is met behulp van kwantoren, zonder de negatie $\neg$ te gebruiken.

(b) Neem aan dat
$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n^2}$$
voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Bewijs dat $(x_n)_n$ een convergente rij is.

(c) Neem nu aan dat
$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n}$$
voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Volgt ook nu dat $(x_n)_n$ een convergente rij is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

[U mag zonder bewijs gebruiken dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ convergeert voor $k > 1$ en divergeert voor $k \leq 1$.]