Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren (3sp)
Bachelor fysica

donderdag 6 september 2018, 14:00–17:00
Studenten met examenfaciliteiten: 14:00-18:00

Auditorium L.00.06 (45 studenten)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 2 pt	(b) 2 pt	(c) 6 pt
Vraag 2:	(a) 6 pt	(b) 2 pt	(c) 2 pt
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	

- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		LaTeX opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Totaal (op 30)		EINDCIJFER (op 20)	

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie, $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$.

(a) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de implicatie

$$B \subset f(A) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B) \subset A$$

niet altijd hoeft te gelden.

(b) Geldt de omgekeerde implicatie

$$f^{-1}(B) \subset A \quad \Longrightarrow \quad B \subset f(A)$$

voor alle $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \quad f^{-1}(B) \subset A \quad \Longleftrightarrow \quad B \subset f(A)$$

geldt als en slechts als f een bijectie is.

Naam:

Vraag 2 X is een verzameling. We definiëren een relatie R op de verzameling $\text{Fun}(X, X)$ van alle functies van X naar X door $(f, g) \in R$ als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \to X$ bestaat met

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\text{Fun}(X, X)$ is. Hierbij mag u algemene eigenschappen van bijecties gebruiken zonder bewijs, maar u moet deze eigenschappen wel vermelden.

(b) Neem $X = \{1, 2, 3\}$ en $f, g \in \text{Fun}(X, X)$ gegeven door

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 1, \qquad f(3) = 2,$$

$$g(1) = 1, \qquad g(2) = 2, \qquad g(3) = 1.$$

Behoren f en g tot dezelfde equivalentieklasse van R ? Beargumenteer uw antwoord.

(c) Neem voor X een aftelbaar oneindige verzameling en voor $f = 1_X$ de eenheidsfunctie op X. Is de equivalentieklasse van f dan eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 3 $(a_n)_n$ is een rij van reële getallen.

(a) De rij $(a_n)_n$ is uiteindelijk constant als geldt

$$\exists L \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq n_0 \implies a_n = L$$

Schrijf de bewering dat $(a_n)_n$ niet uiteindelijk constant is met behulp van kwantoren, zonder de negatie $\neg$ te gebruiken.

(b) Neem aan dat $(a_n)_n$ gegeven wordt door $a_0 = 0$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{10 + 3a_n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat de rij (a_n) strikt stijgend is.