

Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren (6sp)
Bachelor Wiskunde + TWIN

donderdag 6 september 2018, 14:00–18:00

Auditorium L.00.06 (18 studenten)

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
Vraag 1: (a) 2 pt (b) 2 pt (c) 6 pt
Vraag 2: (a) 6 pt (b) 2 pt (c) 2 pt
Vraag 3: (a) 3 pt (b) 3 pt (c) 4 pt
Vraag 4: (a) 2 pt (b) 8 pt
Vraag 5: (a) 2 pt (b) 4 pt (c) 4 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 50)	
Vraag 2 (op 10)		L ^A T _E X opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Vraag 5 (op 10)		EINDCIJFER (op 20)	
Totaal (op 50)			

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie, $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$.

(a) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de implicatie

$$B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A$$

niet altijd hoeft te gelden.

(b) Geldt de omgekeerde implicatie

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

voor alle $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset A \iff B \subset f(A)$$

geldt als en slechts als f een bijectie is.

Naam:

Vraag 2 X is een verzameling. We definiëren een relatie R op de verzameling $\text{Fun}(X, X)$ van alle functies van X naar X door $(f, g) \in R$ als en slechts als er een bijjectie $\sigma : X \rightarrow X$ bestaat met

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g$$

- (a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\text{Fun}(X, X)$ is. Hierbij mag u algemene eigenschappen van bijjecties gebruiken zonder bewijs, maar u moet deze eigenschappen wel vermelden.
- (b) Neem $X = \{1, 2, 3\}$ en $f, g \in \text{Fun}(X, X)$ gegeven door

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2,$$

$$g(1) = 1, \quad g(2) = 2, \quad g(3) = 1.$$

Behoren f en g tot dezelfde equivalentieklasse van R ? Beargumenteer uw antwoord.

- (c) Neem voor X een aftelbaar oneindige verzameling en voor $f = 1_X$ de eenheidsfunctie op X . Is de equivalentieklasse van f dan eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 3 De rij (a_n) is gedefinieerd door $a_0 = 0$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{10 + 3a_n} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat de rij (a_n) strikt stijgend is.
- (b) Bewijs dat de rij naar boven begrensd is.
- (c) Bewijs dat de rij convergent is en bereken de limiet.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Gebruik de definitie om te bewijzen dat de rij $(x_n)_n$ waarbij

$$x_n = \frac{n^2 + \sin(n^3)}{n^2 + 2n + 2}$$

convergent is.

Naam:

Vraag 5 Neem aan dat $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege, begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is.

- (a) Geef de definitie van het supremum van A .
- (b) Neem aan dat $(x_n)_n$ een rij is met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup(A).$$

- (c) Bewijs dat er een convergente rij $(x_n)_n$ met $x_n \in A$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ bestaat met limiet gelijk aan $\sup(A)$.