**Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren**
**Bachelor of Science Fysica en Wiskunde**

**vrijdag 3 februari 2012, 8:30–12:30**

**Naam:**

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Vraag 1: | (a) 4 pt | (b) 2 pt | (c) 2 pt | (d) 2 pt |
| Vraag 2: | (a) 4 pt | (b) 2 pt | (c) 4 pt | |
| Vraag 3: | (a) 6 pt | (b) 2 pt | (c) 2 pt | |
| Vraag 4: | (a) 3 pt | (b) 4 pt | (c) 3 pt | |
| Vraag 5: | (a) 6 pt | (b) 2 pt | (c) 2 pt | |

- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** (a) Schrijf de bewering dat de functie $f : X \to Y$ niet inverteerbaar is met behulp van kwantoren zonder de negatie $\neg$ te gebruiken. U mag $\neq$ wel gebruiken.

Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar? Licht uw antwoord steeds toe. [Een formeel bewijs wordt niet gevraagd.]

(b) De verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ van irrationale getallen.

(c) De verzameling van alle rijen $(a_n)$ met $a_n \in \{0, 1\}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(d) De verzameling van alle rijen $(a_n)$ met $a_n \in \mathbb{N}$ en $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

**Naam:**

**Vraag 2** Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $A$ en $B$ van $Y$ geldt dat

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B) \quad \Rightarrow \quad A \subset B \tag{1}$$

niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat de implicatie (1) geldt voor alle $A \in P(Y)$ en $B \in P(Y)$ als en slechts als $f$ surjectief is.

**Naam:**

**Vraag 3** Zij $X$ een verzameling. We noteren met $\mathrm{Fun}(X)$ de verzameling van alle functies $f : X \to X$. Zij $R$ de relatie op $\mathrm{Fun}(X)$ gegeven door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectieve functie $\sigma : X \to X$ bestaat met $\sigma \circ f = g \circ \sigma$.

(a) Bewijs dat $R$ een equivalentierelatie is.

(b) Neem aan dat $X$ eindig is en dat $(f, g) \in R$. Bewijs dat $f$ en $g$ evenveel vaste punten hebben.

[N.B.: $x \in X$ is een vast punt van $f$ als en slechts als $f(x) = x$.]

(c) Hoeveel equivalentieklassen zijn er in het geval dat $|X| = 2$ ? Beschrijf elke equivalentieklasse.

**Naam:**

**Vraag 4** De rij $(a_n)$ is gedefinieerd door $a_0 = 0$ en

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat de rij $(a_n)$ strikt stijgend is.

(b) Bewijs dat de rij naar boven begrensd is.

(c) Bewijs dat de rij convergent is en bereken de limiet.

**Naam:**

**Vraag 5** Neem aan dat $(a_n)$ en $(b_n)$ twee reële rijen zijn en defineer

$$c_n = \max\{a_n, b_n\}, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}$$

(a) Neem aan dat $(a_n)$ en $(b_n)$ convergente rijen zijn. Bewijs dat $(c_n)$ dan ook een convergente rij is en dat

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \max\{\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\}.$$

(b) Neem aan dat $(a_n)$ en $(b_n)$ begrensde rijen zijn (niet noodzakelijk convergent). Geldt dan de volgende gelijkheid:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \max\{\limsup_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} b_n\} \quad ?$$

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Dezelfde vraag als in (b) voor de gelijkheid

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \max\{\liminf_{n\to\infty} a_n, \liminf_{n\to\infty} b_n\}$$