Examen G0U13C Bewijzen en Redeneren (3 sp.)
Bachelor of Science Fysica

vrijdag 1 februari 2013, 8:30–11:30

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	10 pt		

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Eén van de volgende twee uitspraken

Uitspraak 1 $\forall A_1, A_2 \in P(X) : f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Uitspraak 2 $\forall B_1, B_2 \in P(Y) : f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

is juist. Welke? Bewijs de uitspraak die juist is.

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere uitspraak uit onderdeel (a) niet juist is.

(c) Bewijs dat beide uitspraken juist zijn als en slechts als f injectief is.

Antwoord (a) Uitspraak 2 is juist.
Om deze uitspraak te bewijzen, kiezen we $B_1, B_2 \in P(Y)$ willekeurig.
Neem $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Dit betekent dat $f(x) \in B_1 \cap B_2$ en dus dat $f(x) \in B_1$ en $f(x) \in B_2$. Dan is $x \in f^{-1}(B_1)$ en $x \in f^{-1}(B_2)$. Dus $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Omdat x willekeurig gekozen was volgt hieruit dat

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Kies nu omgekeerd $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Dan geldt $x \in f^{-1}(B_1)$ en $x \in f^{-1}(B_2)$, hetgeen betekent dat $f(x) \in B_1$ en $f(x) \in B_2$. Dus $f(x) \in B_1 \cap B_2$ en dus $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Omdat x willekeurig gekozen was volgt hieruit dat

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$

We hebben de twee inclusies bewezen en dus geldt gelijkheid

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Dit geldt voor elke $B_1, B_2 \in P(Y)$ en hiermee is Uitspraak 2 bewezen.

(b) Uitspraak 1 is niet juist. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door $X = Y = \mathbb{N}$ en de functie

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 10.$$

Als $A_1 = \{0\}$ en $A_2 = \{1\}$ dan $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, terwijl $f(A_1) \cap f(A_2) = \{10\} \cap \{10\} = \{10\}$. Hier zien we dat

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$$

en dus is de uitspraak 1 niet juist.

(c) We weten al dat Uitspraak 2 altijd juist is. Voor (c) moeten we dus bewijzen dat Uitspraak 1 juist is als en slechts als f injectief is. Dit zijn twee implicaties die we apart bewijzen.

Bewijs van: Uitspraak 1 $\Rightarrow$ f is injectief We nemen aan dat Uitspraak 1 juist is. Kies $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$. Neem $A_1 = \{x_1\}$ en $A_2 = \{x_2\}$. Uit onze aanname dat Uitspraak 1 juist is volgt dan dat $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Omdat $x_1 \neq x_2$ is $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ en dus ook $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. We concluderen dat $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$. Omdat $f(A_1) = \{f(x_1)\}$ en $f(A_2) = \{f(x_2)\}$ betekent dit dat $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Uit $x_1 \neq x_2$ volgt dus dat $f(x_1) \neq f(x_2)$ en dit betekent dat f injectief is.

Bewijs van: f is injectief $\Rightarrow$ Uitspraak 1 Neem aan dat f injectief is. Kies $A_1, A_2 \in P(X)$ willekeurig.

Omdat $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ geldt $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ en net zo volgt uit $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ dat $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. Dan is $f(A_1 \cap A_2)$ een deelverzameling van $f(A_1)$ en van $f(A_2)$ en dus ook van de doorsnede:

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Merk op dat we voor het bewijs van deze inclusie de injectiviteit van f niet nodig hebben.

Om de andere inclusie te bewijzen, kiezen we $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ willekeurig. Dan is $y \in f(A_1)$ en $y \in f(A_2)$. Omdat $y \in f(A_1)$ is er een $x_1 \in A_1$ met $y = f(x_1)$. Omdat $y \in f(A_2)$ is er ook een $x_2 \in A_2$ met $y = f(x_2)$. Dan is $y = f(x_1) = f(x_2)$. Uit de injectiviteit van f volgt dan dat $x_1 = x_2$. Dus $x_1 \in A_1 \cap A_2$ en $y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$. Omdat y willekeurig gekozen was volgt hieruit dat

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2).$$

We hebben nu twee inclusies bewezen en hieruit volgt

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Omdat $A_1, A_2 \in P(X)$ willekeurig gekozen wordt is hiermee Uitspraak 1 bewezen.

Naam:

Vraag 2 Zij X een verzameling. Met $\text{Fun}(X)$ noteren we de verzameling van alle functies f van X naar X. Zij R de relatie op $\text{Fun}(X)$ gegeven door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \to X$ bestaat met

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g.$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

N.B.: Eigenschappen van bijecties mag u zonder bewijs gebruiken.

(b) Voor een functie $f \in \text{Fun}(X)$ definiëren we de verzameling van vaste punten door

$$V_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}.$$

Neem aan dat $(f, g) \in R$. Bewijs dat dan V_f en V_g dezelfde kardinaliteit hebben.

(c) Neem $X = \mathbb{N}$.

- Geef een functie f_1 in $\text{Fun}(\mathbb{N})$ waarvoor geldt dat de equivalentieklasse van f_1 een eindige verzameling is.
- Geef een functie f_2 in $\text{Fun}(\mathbb{N})$ waarvoor geldt dat de equivalentieklasse van f_2 een aftelbaar oneindige verzameling is.

Antwoord (a) We tonen aan dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Bewijs dat R reflexief is: Kies $f \in \text{Fun}(X)$ willekeurig. Beschouw de identieke functie $I_X : X \to X : x \mapsto x$. Dan is I_X duidelijk een bijectie en bovendien geldt $f \circ I_X = f$ en $I_X \circ f = f$. Dus $f \circ I_X = I_X \circ f$ en dit bewijst dat $(f, f) \in R$. Omdat f willekeurig gekozen was volgt hieruit dat R reflexief is.

Bewijs dat R symmetrisch is: Kies $(f, g) \in R$ willekeurig. Wegens de definitie van R bestaat er een bijectie $\sigma : X \to X$ zodat

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g. \tag{1}$$

Omdat σ een bijectie is, bestaat de inverse functie $\sigma^{-1} : X \to X$ en σ^{-1} is ook een bijectie. Wanneer we de gelijkheid (1) links en rechts samenstellen met σ^{-1}, krijgen we

$$\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}.$$

Omdat $\sigma \circ \sigma^{-1} = I_X$ en $\sigma^{-1} \circ \sigma = I_X$, volgt hieruit dat $\sigma^{-1} \circ f = g \circ \sigma^{-1}$ en dus ook

$$g \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ f.$$

Omdat σ^{-1} een bijectie is, betekent dit dat $(g, f) \in R$. Omdat tenslotte $(f, g) \in R$ willekeurig gekozen was, besluiten we dat R symmetrisch is.

Bewijs dat R transitief is: Kies $(f,g) \in R$ en $(g,h) \in R$ willekeurig. Omdat $(f,g) \in R$, bestaat er een bijectie $\sigma_1 : X \to X$ zodat $f \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ g$. Omdat ook $(g,h) \in R$, bestaat er ook een bijectie $\sigma_2 : X \to X$ zodat $g \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ h$. Dit betekent dat

$$f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ g \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ h. \tag{2}$$

Omdat de samenstelling van bijecties opnieuw bijectief is, is $\sigma_1 \circ \sigma_2 : X \to X$ een bijectie. Uit (2) volgt dus dat $(f,h) \in R$. Omdat (f,g) en (g,h) willekeurig gekozen waren in R, toont dit aan dat R transitief is.

Merk op dat we bij de bewijzen van symmetrie en transitiviteit ook steeds gebruik maken van het feit dat het samenstellen van functies associatief is.

(b) Zij $(f,g) \in R$. Dan bestaat er een bijectie $\sigma : X \to X$ zodat

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g. \tag{3}$$

Omdat σ een bijectie is, geldt zeker dat V_g en $\sigma(V_g)$ dezelfde kardinaliteit hebben. Het is dus voldoende om te bewijzen dat $\sigma(V_g) = V_f$. Hiervoor bewijzen we twee inclusies.

Kies $y \in \sigma(V_g)$. Dan bestaat er een x in V_g zodat $y = \sigma(x)$. Er geldt dus dat $f(y) = f(\sigma(x))$. Omdat $f \circ \sigma = \sigma \circ g$, volgt dat $f(y) = \sigma(g(x))$. Omdat $x \in V_g$, geldt $g(x) = x$, dus $f(y) = \sigma(x) = y$. Dit toont aan dat y behoort tot V_f. Omdat y willekeurig gekozen was in $\sigma(V_g)$, volgt hieruit de eerste inclusie

$$\sigma(V_g) \subset V_f.$$

Kies vervolgens $x \in V_f$. Omdat σ een bijectie is, bestaat ook de inverse functie σ^{-1}. We kunnen bijgevolg het element $y = \sigma^{-1}(x)$ beschouwen. Net als in deel (a) (meer precies, in het bewijs van de symmetrie van R) volgt uit vergelijking (3) dat $\sigma^{-1} \circ f = g \circ \sigma^{-1}$. Er geldt dus dat $g(y) = g(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(f(x))$. Omdat $x \in V_f$, is $f(x) = x$ en dus $g(y) = \sigma^{-1}(x) = y$. Dit toont aan dat $y \in V_g$, dus $x = \sigma(y) \in \sigma(V_g)$. Omdat x willekeurig gekozen was in V_f, geldt ook de tweede inclusie

$$V_f \subset \sigma(V_g).$$

Omdat we beide inclusies bewezen hebben, volgt de gelijkheid $V_f = \sigma(V_g)$, wat aantoont dat V_f dezelfde kardinaliteit heeft als $\sigma(V_g)$, en dus ook als V_g.

(c)

- Beschouw de functie
  $$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n.$$
  Dit is de eenheidsfunctie op $\mathbb{N}$, namelijk $f_1 = I_{\mathbb{N}}$.

  We beweren dat de equivalentieklasse van f_1 het singleton $\{f_1\}$ is. Om dit in te zien kiezen we een willekeurige functie g die equivalent is met f_1. Dan bestaat er een bijectie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $f_1 \circ \sigma = \sigma \circ g$. Wegens de definitie van f_1 volgt dat $\sigma = \sigma \circ g$. Als we dit links samenstellen met σ^{-1}, volgt er dat g de eenheidsfunctie op $\mathbb{N}$ is, wat betekent dat $g = f_1$. Er bestaat dus maar 1 functie die equivalent is met f_1, en dat is de functie f_1 zelf. Dit toont aan dat de equivalentieklasse van f_1 eindig is.

- Beschouw de functie
$$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 0.$$
We tonen aan dat de equivalentieklasse van f_2 bestaat uit de verzameling van alle constante functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Definieer dus voor elke $k \in \mathbb{N}$ de functie
$$g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto k.$$
We bewijzen dat
$$[f_2] = \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$
door middel van twee inclusies.

Kies $g \in [f_2]$. Dan bestaat er een bijectie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $g \circ \sigma = \sigma \circ f_2$. Kies nu $n \in \mathbb{N}$. Dan is
$$g(n) = g(\sigma(\sigma^{-1}(n))) = \sigma(f_2(\sigma^{-1}(n))) = \sigma(0).$$
Dit toont aan dat g een constante functie is, namelijk $g = g_k$ met $k = \sigma(0)$. Omdat g willekeurig gekozen was in $[f_2]$ bewijst dit dat $[f_2] \subset \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Kies vervolgens een functie g_k met $k \in \mathbb{N}$. Beschouw nu de functie
$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} k & \text{als } n = 0, \\ 0 & \text{als } n = k, \\ n & \text{als } n \neq 0 \text{ en } n \neq k. \end{cases}$$
Het is duidelijk dat σ een bijectie is. Bovendien geldt dat $f_2 \circ \sigma = \sigma \circ g_k$, want beide functies beelden elk natuurlijk getal af op $0 = \sigma(k)$. Dit toont aan dat g_k equivalent is met f_2, dus $g_k \in [f_2]$. Omdat g_k willekeurig gekozen was, hebben we bewezen dat $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset [f_2]$.

Uit beide inclusies volgt de gelijkheid $[f_2] = \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Het is duidelijk dat de verzameling $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ aftelbaar oneindig is en dus heeft f_2 een aftelbaar oneindige equivalentieklasse.

Naam:

Vraag 3 (a) Bereken de voortbrengende functie van de rij (a_k) gegeven door $a_0 = 2$ en $a_k = 3a_{k-1} - 4$ voor $k \geq 1$.

(b) Gebruik de voortbrengende functie om a_k te berekenen.

Antwoord

(a) We noteren

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

voor de voortbrengende functie van de rij (a_k). Omdat $a_0 = 2$, geldt zeker

$$f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Vervolgens kunnen we de recursierelatie $a_k = 3a_{k-1} - 4$ toepassen om in te zien dat

$$f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (3a_{k-1} - 4)x^k = 2 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k - 4 \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

We bekijken nu beide reeksen afzonderlijk. Enerzijds kunnen we de eerste reeks herschrijven naar

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x\ f(x).$$

In de tweede reeks herkennen we een meetkundige reeks:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

We besluiten dat $f(x) = 2 + 3x\ f(x) - 4\ \frac{x}{1-x}$. Hieruit volgt dat $(1-3x)f(x) = \frac{2-6x}{1-x}$, dus

$$f(x) = \frac{2-6x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{2}{1-x}.$$

(b) Om hieruit de termen a_k te bepalen, schrijven we $f(x)$ terug als reeks, met behulp van de formule voor een meetkundige reeks: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

We lezen hieruit af dat $a_k = 2$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.