Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren (6 sp.)
Bachelor of Science Wiskunde

vrijdag 1 februari 2013, 8:30–12:30

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	10 pt		
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Eén van de volgende twee uitspraken

Uitspraak 1 $\quad \forall A_1, A_2 \in P(X) : \; f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Uitspraak 2 $\quad \forall B_1, B_2 \in P(Y) : \; f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

is juist. Welke? Bewijs de uitspraak die juist is.

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere uitspraak uit onderdeel (a) niet juist is.

(c) Bewijs dat beide uitspraken juist zijn als en slechts als f injectief is.

Antwoord (a) Uitspraak 2 is juist.
Om deze uitspraak te bewijzen, kiezen we $B_1, B_2 \in P(Y)$ willekeurig.

Neem $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Dit betekent dat $f(x) \in B_1 \cap B_2$ en dus dat $f(x) \in B_1$ en $f(x) \in B_2$. Dan is $x \in f^{-1}(B_1)$ en $x \in f^{-1}(B_2)$. Dus $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Omdat x willekeurig gekozen was volgt hieruit dat

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Kies nu omgekeerd $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Dan geldt $x \in f^{-1}(B_1)$ en $x \in f^{-1}(B_2)$, hetgeen betekent dat $f(x) \in B_1$ en $f(x) \in B_2$. Dus $f(x) \in B_1 \cap B_2$ en dus $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Omdat x willekeurig gekozen was volgt hieruit dat

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$

We hebben de twee inclusies bewezen en dus geldt gelijkheid

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Dit geldt voor elke $B_1, B_2 \in P(Y)$ en hiermee is Uitspraak 2 bewezen.

(b) Uitspraak 1 is niet juist. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door $X = Y = \mathbb{N}$ en de functie

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 10.$$

Als $A_1 = \{0\}$ en $A_2 = \{1\}$ dan $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, terwijl $f(A_1) \cap f(A_2) = \{10\} \cap \{10\} = \{10\}$. Hier zien we dat

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$$

en dus is de uitspraak 1 niet juist.

(c) We weten al dat Uitspraak 2 altijd juist is. Voor (c) moeten we dus bewijzen dat Uitspraak 1 juist is als en slechts als f injectief is. Dit zijn twee implicaties die we apart bewijzen.

Bewijs van: Uitspraak 1 $\Rightarrow$ f is injectief We nemen aan dat Uitspraak 1 juist is. Kies $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$. Neem $A_1 = \{x_1\}$ en $A_2 = \{x_2\}$. Uit onze aanname dat Uitspraak 1 juist is volgt dan dat $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Omdat $x_1 \neq x_2$ is $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ en dus ook $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. We concluderen dat $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$. Omdat $f(A_1) = \{f(x_1)\}$ en $f(A_2) = \{f(x_2)\}$ betekent dit dat $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Uit $x_1 \neq x_2$ volgt dus dat $f(x_1) \neq f(x_2)$ en dit betekent dat f injectief is.

Bewijs van: f is injectief $\Rightarrow$ Uitspraak 1 Neem aan dat f injectief is. Kies $A_1, A_2 \in P(X)$ willekeurig.

Omdat $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ geldt $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ en net zo volgt uit $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ dat $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. Dan is $f(A_1 \cap A_2)$ een deelverzameling van $f(A_1)$ en van $f(A_2)$ en dus ook van de doorsnede:

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Merk op dat we voor het bewijs van deze inclusie de injectiviteit van f niet nodig hebben.

Om de andere inclusie te bewijzen, kiezen we $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ willekeurig. Dan is $y \in f(A_1)$ en $y \in f(A_2)$. Omdat $y \in f(A_1)$ is er een $x_1 \in A_1$ met $y = f(x_1)$. Omdat $y \in f(A_2)$ is er ook een $x_2 \in A_2$ met $y = f(x_2)$. Dan is $y = f(x_1) = f(x_2)$. Uit de injectiviteit van f volgt dan dat $x_1 = x_2$. Dus $x_1 \in A_1 \cap A_2$ en $y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$. Omdat y willekeurig gekozen was volgt hieruit dat

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2).$$

We hebben nu twee inclusies bewezen en hieruit volgt

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Omdat $A_1, A_2 \in P(X)$ willekeurig gekozen wordt is hiermee Uitspraak 1 bewezen.

Naam:

Vraag 2 Zij X een verzameling. Met $\mathrm{Fun}(X)$ noteren we de verzameling van alle functies f van X naar X. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X)$ gegeven door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \to X$ bestaat met

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g.$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

N.B.: Eigenschappen van bijecties mag u zonder bewijs gebruiken.

(b) Voor een functie $f \in \mathrm{Fun}(X)$ definiëren we de verzameling van vaste punten door

$$V_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}.$$

Neem aan dat $(f, g) \in R$. Bewijs dat dan V_f en V_g dezelfde kardinaliteit hebben.

(c) Neem $X = \mathbb{N}$.

- Geef een functie f_1 in $\mathrm{Fun}(\mathbb{N})$ waarvoor geldt dat de equivalentieklasse van f_1 een eindige verzameling is.
- Geef een functie f_2 in $\mathrm{Fun}(\mathbb{N})$ waarvoor geldt dat de equivalentieklasse van f_2 een aftelbaar oneindige verzameling is.

Antwoord (a) We tonen aan dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Bewijs dat R reflexief is: Kies $f \in \mathrm{Fun}(X)$ willekeurig. Beschouw de identieke functie $I_X : X \to X : x \mapsto x$. Dan is I_X duidelijk een bijectie en bovendien geldt $f \circ I_X = f$ en $I_X \circ f = f$. Dus $f \circ I_X = I_X \circ f$ en dit bewijst dat $(f, f) \in R$. Omdat f willekeurig gekozen was volgt hieruit dat R reflexief is.

Bewijs dat R symmetrisch is: Kies $(f, g) \in R$ willekeurig. Wegens de definitie van R bestaat er een bijectie $\sigma : X \to X$ zodat

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g. \tag{1}$$

Omdat σ een bijectie is, bestaat de inverse functie $\sigma^{-1} : X \to X$ en σ^{-1} is ook een bijectie. Wanneer we de gelijkheid (1) links en rechts samenstellen met σ^{-1}, krijgen we

$$\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}.$$

Omdat $\sigma \circ \sigma^{-1} = I_X$ en $\sigma^{-1} \circ \sigma = I_X$, volgt hieruit dat $\sigma^{-1} \circ f = g \circ \sigma^{-1}$ en dus ook

$$g \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ f.$$

Omdat σ^{-1} een bijectie is, betekent dit dat $(g, f) \in R$. Omdat tenslotte $(f, g) \in R$ willekeurig gekozen was, besluiten we dat R symmetrisch is.

Bewijs dat R transitief is: Kies $(f,g) \in R$ en $(g,h) \in R$ willekeurig. Omdat $(f,g) \in R$, bestaat er een bijectie $\sigma_1 : X \to X$ zodat $f \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ g$. Omdat ook $(g,h) \in R$, bestaat er ook een bijectie $\sigma_2 : X \to X$ zodat $g \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ h$. Dit betekent dat

$$f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ g \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ h. \tag{2}$$

Omdat de samenstelling van bijecties opnieuw bijectief is, is $\sigma_1 \circ \sigma_2 : X \to X$ een bijectie. Uit (2) volgt dus dat $(f,h) \in R$. Omdat (f,g) en (g,h) willekeurig gekozen waren in R, toont dit aan dat R transitief is.

Merk op dat we bij de bewijzen van symmetrie en transitiviteit ook steeds gebruik maken van het feit dat het samenstellen van functies associatief is.

(b) Zij $(f,g) \in R$. Dan bestaat er een bijectie $\sigma : X \to X$ zodat

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g. \tag{3}$$

Omdat σ een bijectie is, geldt zeker dat V_g en $\sigma(V_g)$ dezelfde kardinaliteit hebben. Het is dus voldoende om te bewijzen dat $\sigma(V_g) = V_f$. Hiervoor bewijzen we twee inclusies.

Kies $y \in \sigma(V_g)$. Dan bestaat er een x in V_g zodat $y = \sigma(x)$. Er geldt dus dat $f(y) = f(\sigma(x))$. Omdat $f \circ \sigma = \sigma \circ g$, volgt dat $f(y) = \sigma(g(x))$. Omdat $x \in V_g$, geldt $g(x) = x$, dus $f(y) = \sigma(x) = y$. Dit toont aan dat y behoort tot V_f. Omdat y willekeurig gekozen was in $\sigma(V_g)$, volgt hieruit de eerste inclusie

$$\sigma(V_g) \subset V_f.$$

Kies vervolgens $x \in V_f$. Omdat σ een bijectie is, bestaat ook de inverse functie σ^{-1}. We kunnen bijgevolg het element $y = \sigma^{-1}(x)$ beschouwen. Net als in deel (a) (meer precies, in het bewijs van de symmetrie van R) volgt uit vergelijking (3) dat $\sigma^{-1} \circ f = g \circ \sigma^{-1}$. Er geldt dus dat $g(y) = g(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(f(x))$. Omdat $x \in V_f$, is $f(x) = x$ en dus $g(y) = \sigma^{-1}(x) = y$. Dit toont aan dat $y \in V_g$, dus $x = \sigma(y) \in \sigma(V_g)$. Omdat x willekeurig gekozen was in V_f, geldt ook de tweede inclusie

$$V_f \subset \sigma(V_g).$$

Omdat we beide inclusies bewezen hebben, volgt de gelijkheid $V_f = \sigma(V_g)$, wat aantoont dat V_f dezelfde kardinaliteit heeft als $\sigma(V_g)$, en dus ook als V_g.

(c)

- Beschouw de functie
  $$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n.$$
  Dit is de eenheidsfunctie op $\mathbb{N}$, namelijk $f_1 = I_{\mathbb{N}}$.

  We beweren dat de equivalentieklasse van f_1 het singleton $\{f_1\}$ is. Om dit in te zien kiezen we een willekeurige functie g die equivalent is met f_1. Dan bestaat er een bijectie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $f_1 \circ \sigma = \sigma \circ g$. Wegens de definitie van f_1 volgt dat $\sigma = \sigma \circ g$. Als we dit links samenstellen met σ^{-1}, volgt er dat g de eenheidsfunctie op $\mathbb{N}$ is, wat betekent dat $g = f_1$. Er bestaat dus maar 1 functie die equivalent is met f_1, en dat is de functie f_1 zelf. Dit toont aan dat de equivalentieklasse van f_1 eindig is.

- Beschouw de functie
$$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 0.$$
We tonen aan dat de equivalentieklasse van f_2 bestaat uit de verzameling van alle constante functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Definieer dus voor elke $k \in \mathbb{N}$ de functie
$$g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto k.$$
We bewijzen dat
$$[f_2] = \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$
door middel van twee inclusies.

Kies $g \in [f_2]$. Dan bestaat er een bijectie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $g \circ \sigma = \sigma \circ f_2$. Kies nu $n \in \mathbb{N}$. Dan is
$$g(n) = g(\sigma(\sigma^{-1}(n))) = \sigma(f_2(\sigma^{-1}(n))) = \sigma(0).$$
Dit toont aan dat g een constante functie is, namelijk $g = g_k$ met $k = \sigma(0)$. Omdat g willekeurig gekozen was in $[f_2]$ bewijst dit dat $[f_2] \subset \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Kies vervolgens een functie g_k met $k \in \mathbb{N}$. Beschouw nu de functie
$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} k & \text{als } n = 0, \\ 0 & \text{als } n = k, \\ n & \text{als } n \neq 0 \text{ en } n \neq k. \end{cases}$$
Het is duidelijk dat σ een bijectie is. Bovendien geldt dat $f_2 \circ \sigma = \sigma \circ g_k$, want beide functies beelden elk natuurlijk getal af op $0 = \sigma(k)$. Dit toont aan dat g_k equivalent is met f_2, dus $g_k \in [f_2]$. Omdat g_k willekeurig gekozen was, hebben we bewezen dat $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset [f_2]$.

Uit beide inclusies volgt de gelijkheid $[f_2] = \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Het is duidelijk dat de verzameling $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ aftelbaar oneindig is en dus heeft f_2 een aftelbaar oneindige equivalentieklasse.

Naam:

Vraag 3 A en B zijn niet-lege, naar boven begrensde deelverzamelingen van $[0, \infty[$ met $0 \notin B$. Zij

$$C = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in A \wedge y \in B \right\}.$$

Bewijs dat C naar onder begrensd is en dat

$$\inf C = \frac{\inf A}{\sup B}.$$

Antwoord Omdat $A \subset [0, \infty[$ is A naar onder begrensd. Verder is A niet leeg en bijgevolg heeft A een infimum. Omdat alle elementen van A positief zijn, zal ook $\inf A \geq 0$. Er is ook gegeven dat B een niet-lege, naar boven begrensde verzameling is, dus B heeft een supremum. Omdat $0 \notin B$, zijn alle elementen van B strikt positief, dus ook $\sup B > 0$. Het heeft dus zin om het getal $I = \frac{\inf A}{\sup B}$ te beschouwen en bovendien geldt $I \geq 0$.

We bewijzen eerst dat I een ondergrens is voor C. Kies dus een element $c \in C$. Dan bestaan er $x \in A$ en $y \in B$ met $c = \frac{x}{y}$. Omdat $x \in A$, is $x \geq \inf A$. Omdat $y \in B$ is $y \leq \sup B$. Tevens geldt $y > 0$ en $\inf A \geq 0$ en bijgevolg is

$$c = \frac{x}{y} \geq \frac{\inf A}{\sup B},$$

Omdat $c \in C$ willekeurig gekozen was, is $I = \frac{\inf A}{\sup B}$ een ondergrens voor C.

Tenslotte bewijzen we ook dat I de grootste ondergrens is van C. Neem een getal z met $z > I$. Omdat $\sup B > 0$ blijft de strikte ongelijkheid behouden als we vermenigvuldigen met $\sup B$. Dus volgt vanwege de definitie van I dat

$$z \cdot \sup B > \inf A.$$

Omdat $\inf A$ de grootste ondergrens is van A, is $z \cdot \sup B$ dus geen ondergrens van A. Er bestaat bijgevolg een element $x \in A$ zodat $z \cdot \sup B > x$. Omdat $z > 0$, impliceert dit

$$\sup B > \frac{x}{z}.$$

Dit betekent dat $\frac{x}{z}$ geen bovengrens is van B. Er bestaat dus een element $y \in B$ met $y > \frac{x}{z}$. Bijgevolg is ook

$$z > \frac{x}{y},$$

want y en z zijn allebei strikt positief. Dan is $\frac{x}{y}$ een element van C, en z is strikt groter dan dit element van C. Bijgevolg is z geen ondergrens van C.

We besluiten dus dat er geen ondergrens van C bestaat die strikt groter is dan I, hetgeen aantoont dat

$$\inf C = I = \frac{\inf A}{\sup B}.$$

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Bewijs met behulp van de definitie dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \frac{np}{1 + np^2}$$

convergent is. Hierin is $p \in \mathbb{R}$ een vast gekozen reëel getal.

Antwoord (a) Een rij (a_n) van reële getallen is convergent als en slechts als

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

(b) Kies $p \in \mathbb{R}$. Als $p = 0$ zijn alle getallen a_n ook gelijk aan nul, en dus zal de rij zeker convergeren naar limiet 0. We beschouwen dus verder het geval dat $p \neq 0$. Stel dan $L = \frac{1}{p}$. We bewijzen dat (a_n) convergeert naar L.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem dan een natuurlijk getal $n_0 > \frac{1}{\varepsilon|p|^3}$. Kies vervolgens willekeurig een $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq n_0$. Dan is

$$|a_n - L| = \left|\frac{np}{1 + np^2} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{-1}{p(1 + np^2)}\right| = \frac{1}{|p(1 + np^2)|}.$$

Omdat $1 + np^2 > np^2 > 0$, geldt er

$$|a_n - L| = \frac{1}{|p|(1 + np^2)} < \frac{1}{|p|np^2} = \frac{1}{n|p|^3}.$$

We hebben $n \geq n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon|p|^3}$ gekozen, dus er volgt dat

$$\frac{1}{n} < \varepsilon|p|^3$$

en bijgevolg

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Vanwege de definitie van van convergentie van een rij (zie onderdeel (a)) kunnen we nu concluderen (a_n) een convergente rij is.

Naam:

Vraag 5 Gegeven is een rij (a_n) die voldoet aan $a_0 \geq 0$,

$$a_{3n+1} = 2\,a_{3n}, \qquad a_{3n+2} = \sqrt{a_{3n+1}}, \qquad a_{3n+3} = 4 + a_{3n+2}.$$

(a) Bewijs dat de deelrij (a_{3n}) convergent is. Wat is de limiet van de deelrij en hoe hangt de limiet af van de beginwaarde a_0 ?

[Hint: Vind eerst een recursierelatie voor de rij (b_n) met $b_n = a_{3n}$.]

(b) Bereken $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Antwoord (a) We zoeken eerst een recursierelatie voor de rij $(b_n) = (a_{3n})$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt er met de gegeven recursierelaties dat

$$b_{n+1} = a_{3n+3} = 4 + a_{3n+2} = 4 + \sqrt{a_{3n+1}} = 4 + \sqrt{2a_{3n}} = 4 + \sqrt{2b_n}.$$

Aan de hand van de functie

$$F : [0,\infty[\to [0,\infty[: x \mapsto 4 + \sqrt{2x}$$

wordt de rij (b_n) dus recursief bepaald door de $b_{n+1} = F(b_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $b_0 = a_0 \geq 0$.

Er zijn nu twee mogelijke manieren om aan te tonen dat de rij (b_n) convergent is. De eerste manier is om gebruik te maken van een contractie, de tweede manier is via een monotone begrensde rij.

Bewijs 1 (via contractie) Het is duidelijk dat $F(x) \geq 4$ voor alle x. In het bijzonder is $b_n \geq 4$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

We kunnen nu de functie F herdefiniëren door zowel het domein als het codomein te beperken tot $[4,\infty[$:

$$F : [4,\infty[\to [4,\infty[: x \mapsto 4 + \sqrt{2x}.$$

We bewijzen nu dat F een contractie is op $[4,\infty[$ met contractiefactor $\frac{\sqrt{2}}{4} < 1$. Kies daarvoor x en y willekeurig in $[4,\infty[$. Dan is, met behulp van de worteltruc,

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &= \left|4 + \sqrt{2x} - (4 + \sqrt{2y})\right| \\ &= \sqrt{2}\,\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \\ &= \sqrt{2}\,\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.\end{aligned}$$

Omdat x en y groter zijn dan of gelijk zijn aan 4, is $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 4$. Er geldt dus dat

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|x-y|.$$

Omdat $\frac{\sqrt{2}}{4} < 1$ betekent dit dat F een contractie is op $[4, \infty[$ met contractiefactor < 1. Wegens de contractiestelling heeft F precies één vast punt x^*. Bovendien volgt uit dezelfde contractiestelling dat de rij (b_n) gegeven door $b_{n+1} = F(b_n)$ convergent is met limiet x^*.

Tenslotte bepalen we nog de limiet x^*. Omdat x^* een vast punt is van F, geldt zeker dat $F(x^*) = x^*$, dus $4 + \sqrt{2x^*} = x^*$. Dit betekent dat $2x^* = (x^* - 4)^2 = (x^*)^2 - 8x^* + 16$ en $x^* \geq 4$. Wanneer we de vierkantsvergelijking oplossen, vinden we

$$x^* = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = 5 \pm 3.$$

Dus $x^* = 8$ of $x^* = 2$. We weten zeker dat $x^* \geq 4$. Het gezochte vaste punt, en dus ook de gezochte limiet, is bijgevolg $x^* = 8$. De limiet hangt niet af van de beginwaarde a_0.

[Merk op dat F geen contractie op $[0, \infty[$ is. De beperking tot $[4, \infty[$ is daarom wel essentieel om de contractiestelling te kunnen toepassen.]

Bewijs 2 (via monotone rij) Voor $b_0 = 8$ geldt $b_1 = 8$ en dan is met inductie eenvoudig in te zien dat $b_n = 8$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De rij (b_n) is dan constant gelijk aan 8, en ze is dus zeker convergent met limiet 8. We nemen verder aan dat $b_n \neq 8$.

We bewijzen dat de rij (b_n) stijgend en naar boven begrensd is in het geval dat $b_0 < 8$, en dalend en naar onder begrensd in het geval dat $b_0 > 8$.

Er geldt dat $b_1 = F(b_0) = 4 + \sqrt{2b_0}$, waaruit volgt dat $(b_1 - 4)^2 = 2b_0$. Bijgevolg is

$$b_1 - b_0 = 4 + \sqrt{2b_0} - b_0 = \left(\sqrt{8} - \sqrt{b_0}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{b_0}\right).$$

Deze laatste gelijkheid is eenvoudig te controleren door de haakjes uit te werken. Omdat $\sqrt{2} + \sqrt{b_0}$ strikt positief is, wordt het teken van $b_1 - b_0$ bepaald door dat van $\sqrt{8} - \sqrt{b_0}$. Bijgevolg is $b_1 - b_0 > 0$ in het geval dat $b_0 < 8$ en $b_1 - b_0 < 0$ als $b_0 > 8$.

Geval $b_0 < 8$ Neem nu aan dat $b_0 < 8$. We bewijzen met inductie dat $b_{n+1} > b_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. De <u>beginstap</u> is al bewezen, want voor $b_0 < 8$ geldt $b_1 - b_0 > 0$. In de <u>inductiestap</u> nemen we aan dat $b_n > b_{n-1}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}_0$. Omdat $F : x \mapsto 4 + \sqrt{2x}$ een strikt stijgende functie is, volgt dan $F(b_n) > F(b_{n-1})$. Dit betekent dat $b_{n+1} > b_n$ en dus is de inductiestap bewezen. Vanwege het principe van volledige inductie volgt dus dat $b_{n+1} > b_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

We zullen vervolgens met inductie aantonen dat $b_n < 8$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Ook dit is heel eenvoudig. Voor $n = 0$ klopt het, want er is aangenomen dat $b_0 < 8$. Neem aan dat $b_n < 8$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dan volgt (wederom omdat F strikt stijgend is)

$$b_{n+1} = 4 + \sqrt{2b_n} < 4 + \sqrt{2 \cdot 8} = 8.$$

Met volledige inductie volgt dat $b_n < 8$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

In het geval $b_0 < 8$ is nu bewezen dat (b_n) een strikt stijgende rij is die naar boven begrensd is door 8.

Geval $b_0 > 8$ Neem nu aan dat $b_0 > 8$. Dan hebben we al bewezen dat $b_1 < b_0$. Met inductie volgt $b_{n+1} < b_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dit gaat op precies dezelfde manier als in het geval $b_0 < 8$, waarbij gebruik gemaakt wordt van het feit dat F strikt stijgend is. De rij (b_n) is bijgevolg strikt dalend. Uit de recursie $b_{n+1} = 4 + \sqrt{2b_n}$ is het ook duidelijk dat $b_{n+1} \geq 4$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat de rij (b_n) naar onder begrensd is.

In het geval $b_0 > 8$ is bewezen dat (b_n) een strikt dalende rij is die naar onder begrensd is door 4.

In beide gevallen volgt dat de rij (b_n) convergent is, zeg met limiet L. Uit $b_{n+1} = 4 + \sqrt{2b_n}$ volgt dat

$$(b_{n+1} - 4)^2 = 2b_n$$

voor elke $n \in \mathbb{N}$. De rechterkant hierin convergeert naar $2L$ als $n \to \infty$. Omdat de rij (b_{n+1}) ook naar L convergeert, convergeert de linkerkant naar $(L-4)^2$ als $n \to \infty$ (vanwege de rekenregels voor limieten). Dus L voldoet aan

$$(L - 4)^2 = 2L.$$

Dit is een vierkantsvergelijking voor L met als oplossingen $L = 8$ en $L = 2$. Omdat $b_n \geq 4$ voor $n \geq 1$ kan $L = 2$ niet de limiet zijn. Dus $L = 8$ en deze limiet hangt niet af van de beginwaarde.

(b) Uit de rekenregels voor limieten volgt dat de rij $(a_{3n+1})_n = (2a_{3n})_n$ convergeert naar $2 \cdot 8 = 16$, omdat de rij $(a_{3n})_n$ convergeert naar 8. Daaruit volgt dan weer dat de rij $(a_{3n+2})_n = (\sqrt{a_{3n+1}})_n$ convergeert naar $\sqrt{16} = 4$. In de staart van de rij $(a_n)_n$ liggen alle termen a_n dus dichtbij 8, 16 of 4, afhankelijk van de waarde van n modulo 3. Een convergente deelrij $(a_{n_k})_k$ van de rij $(a_n)_n$ kan dus alleen convergeren naar 8, 16 of 4. Hieruit volgt dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 4$$

en

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 16.$$