Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren (6 sp.)
Bachelor of Science Wiskunde

vrijdag 1 februari 2013, 8:30–12:30

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	10 pt		
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 6 pt	(b) 4 pt	

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Eén van de volgende twee uitspraken

Uitspraak 1 $\forall A_1, A_2 \in P(X) : \ f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Uitspraak 2 $\forall B_1, B_2 \in P(Y) : \ f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

is juist. Welke? Bewijs de uitspraak die juist is.

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere uitspraak uit onderdeel (a) niet juist is.

(c) Bewijs dat beide uitspraken juist zijn als en slechts als f injectief is.

Naam:

Vraag 2 Zij X een verzameling. Met $\mathrm{Fun}(X)$ noteren we de verzameling van alle functies f van X naar X. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X)$ gegeven door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \to X$ bestaat met

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g.$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

N.B.: Eigenschappen van bijecties mag u zonder bewijs gebruiken.

(b) Voor een functie $f \in \mathrm{Fun}(X)$ definiëren we de verzameling van vaste punten door

$$V_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}.$$

Neem aan dat $(f, g) \in R$. Bewijs dat dan V_f en V_g dezelfde kardinaliteit hebben.

(c) Neem $X = \mathbb{N}$.

- Geef een functie f_1 in $\mathrm{Fun}(\mathbb{N})$ waarvoor geldt dat de equivalentieklasse van f_1 een eindige verzameling is.
- Geef een functie f_2 in $\mathrm{Fun}(\mathbb{N})$ waarvoor geldt dat de equivalentieklasse van f_2 een aftelbaar oneindige verzameling is.

Naam:

Vraag 3 A en B zijn niet-lege, naar boven begrensde verzamelingen van $[0, \infty[$ met $0 \notin B$. Zij

$$C = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in A \wedge y \in B \right\}.$$

Bewijs dat C naar onder begrensd is en dat

$$\inf C = \frac{\inf A}{\sup B}.$$

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Bewijs met behulp van de definitie dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \frac{np}{1 + np^2}$$

convergent is. Hierin is $p \in \mathbb{R}$ een vast gekozen reëel getal.

Naam:

Vraag 5 Gegeven is een rij (a_n) die voldoet aan $a_0 \geq 0$,

$$a_{3n+1} = 2\,a_{3n}, \qquad a_{3n+2} = \sqrt{a_{3n+1}}, \qquad a_{3n+3} = 4 + a_{3n+2}.$$

(a) Bewijs dat de deelrij (a_{3n}) convergent is. Wat is de limiet van de deelrij en hoe hangt de limiet af van de beginwaarde a_0 ?

[Hint: Vind eerst een recursierelatie voor de rij (b_n) met $b_n = a_{3n}$.]

(b) Bereken $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.