Examen Wiskunde II
1ste bachelor Geologie
maandag 23 augustus 2010, 14:00–18:30

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; zonder los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent (Simon Allewaert, Carla Jacobs, Eva Leenknegt, Sven Raum, Kristof Schoels of Johan Van Kerckhoven).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$$

met p een vast reëel getal.

(a) Voor welke $p \in \mathbb{R}$ zijn de vectoren lineair afhankelijk ?

(b) Bereken de oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door $\vec{b}$ en $\vec{c}$. Voor welke p is deze oppervlakte minimaal?

(c) Geef alle oplossingen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ van

$$A\vec{x} = A^T\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

waarin A^T de getransponeerde matrix is.

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Beschouw een model voor de populatie van twee soorten virussen X en Y. Het aanwezige aantal van soort X na n weken geven we aan met x_n en dat van soort Y met y_n. We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + qy_n \qquad \text{en} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + y_n.$$

Hierin is $q \in \mathbb{R}$ een constante.

(a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van q).

(b) Voor welke waarden van $q \in \mathbb{R}$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

(c) Voor welke q is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $a_0 = 2010$ en $b_0 = 0$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat de temperatuur $T(t)$ van een zeker object voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{2}(T_{omg} - T)^3$$

waarin T_{omg} de (constante) omgevingstemperatuur is en $\kappa > 0$ een constante.

(a) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

(b) Neem aan dat $T_{omg} = 10$ en dat $T(0) = 0$ en $T(1) = 5$. Bereken hieruit κ.

(c) Wanneer is de temperatuur gelijk aan 8?

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-2t}$$

die voldoet aan

$$x(0) = 0 \qquad \text{en} \qquad x'(0) = 0.$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de reeks convergent?

(b) De 2π periodieke functie $g(x)$ is oneven en wordt op het interval $]0, \pi[$ gegeven door

$$g(x) = \cos x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Schets de grafiek van deze functie.

(c) Bereken de Fourierreeks van de functie $g(x)$ uit onderdeel (b).

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 Het oppervlak S is het deel van de ellipsoïde

$$S: \quad x^2 + y^2 + 4z^2 = R^2 \qquad \text{met} \quad z \geq 1 \quad \text{en} \quad R > 2.$$

De eenheidsnormaal $\hat{n}$ op S is naar buiten gericht. De rand van S is de kromme

$$C: \quad x^2 + y^2 = R^2 - 4, \qquad z = 1.$$

Het vectorveld $\vec{F}$ is gegeven door $\quad \vec{F} = (xz, y + z^2, x - z)$.

(a) Bereken $\quad \text{rot}\vec{F} \quad$ en $\quad \text{div}\vec{F}$.

(b) Bereken $\quad \displaystyle\oint_C \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(c) Bereken de totale massa van S in het geval van een massadichtheid

$$\rho(x, y, z) = \text{div}\vec{F}(x, y, z) \qquad \text{op } S.$$

Antwoord: