**Examen Wiskunde II**
**Bachelor Geologie**
**vrijdag 24 augustus 2012, 9:00–13:30**
**Auditorium 200C. aud A en aud B.**

**Naam:**

**Studierichting:**

**Naam assistent(e):**

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Simon Allewaert, Bart Jacobs).
- Kladpapier wordt niet nagekeken en hoeft u ook niet in te leveren.
- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = 3 \\ 3x & -y & -\alpha z & = \beta \\ x & -y & +z & = 2 \end{cases}$$

waarin $\alpha$ en $\beta$ constanten zijn.

(a) Bepaal alle $\alpha$ en $\beta$ waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.

(b) Bepaal alle $\alpha$ en $\beta$ waarvoor het stelsel geen oplossing heeft.

(c) In het geval dat het stelsel meer dan één oplossing heeft, bepaalt het stelsel een rechte. Geef een parametervergelijking voor deze rechte.

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 2** Beschouw een model voor de populatie van konijnen en vossen in een zeker gebied. Het aantal konijnen na $n$ maanden wordt aangegeven met $K_n$ en het aantal vossen met $V_n$. We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$K_{n+1} = \frac{4}{3}K_n - \frac{1}{3}V_n \qquad \text{en} \qquad V_{n+1} = \lambda V_n + \frac{1}{2}K_n.$$

Hierin is $\lambda \in [0, 1]$ een constante.

(a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van $\lambda$).

(b) Voor welke $\lambda$ is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $K_0 = 600$ en $V_0 = 100$.

(c) Voor welke waarden van $\lambda \in [0, 1]$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 3** Beschouw de differentiaalvergelijking

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 2xy^2.$$

(a) Schrijf $v = y^{-1}$ en laat zien dat $v$ voldoet aan

$$x\frac{dv}{dx} - 6v = -2x$$

(b) Los de differentiaalvergelijking voor $v$ op.

(c) Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking voor $y$ die voldoet aan $y(1) = 1$.

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 4** (a) Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$$

(b) Bepaal de oplossing van

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 2\cos^2 t.$$

die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x = 1 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = 0 \qquad \text{voor } t = 0.$$

[Hint bij (b): denk aan goniometrische formule $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. ]

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 5** (a) Geef alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx}$$

convergent is. Bepaal voor deze waarden van $x$ de som van de reeks.

(b) Bereken de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\binom{2k}{k}}.$$

(c) Bereken de Taylorreeks van de functie $f(x) = 1/x^2$ rond $x = 1$. Wat is het convergentiegebied van de Taylorreeks?

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 6** Zij $S$ het halve boloppervlak dat gegeven wordt door

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0$$

met $R > 0$. Zij $\vec{F}$ het vectorveld

$$\vec{F} = (-y(x^2 + y^2), x(x^2 + y^2), 0)$$

(a) Bereken $\operatorname{div} \vec{F}$ en $\operatorname{rot} \vec{F}$.

(b) Bereken (bv. met de stelling van Stokes)

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS$$

waarin $\vec{n}$ de naar boven wijzende eenheidsnormaal op $S$ is.

(c) Bereken

$$\iint_S z^3 \, dS.$$

---

**Antwoord:**