Examen Wiskunde II
Bachelor Geologie
vrijdag 10 juni 2011, 8:30–13:00

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Eva Leenknegt, Berdien Peeters).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Beschouw de vectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

en de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Hierin is a een reële constante.

(a) Beredeneer (zonder berekening uit te voeren) dat voor de waarden $a = 0$, $a = 2$ en $a = 4$ de matrix A niet inverteerbaar is.

(b) Bereken de oppervlakte van de driehoek met $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ als hoekpunten.

(c) Voor welke waarden van a liggen de drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ op één rechte?

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(a) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(b) Geef alle $p \geq 0$ waarvoor de limiet

$$\lim_{n\to\infty} p^n A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestaat en bereken deze limiet. [De limiet mag ook gelijk aan $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zijn.]

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 De populatie $x(t)$ van soort X voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \sin t$$

(a) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

(b) Voor welke beginwaarden $x(0) > 0$ blijft de oplossing begrensd voor alle $t \geq 0$?

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = y(x-2)$$
$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 3y + ax$$

met a een reële parameter.

(a) De oorsprong is altijd een evenwichtspunt van dit stelsel. Onderzoek voor welke a de oorsprong een stabiel evenwicht is. Voor welke a treedt spiraliserend gedrag op rond de oorsprong?

(b) Neem $a = 1$ en bereken de overige evenwichtspunten (verschillend van de oorsprong) en bepaal hun stabiliteit.

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \frac{1}{P_2(x)}$$

waarin P_2 de Legendre veelterm van graad 2 is.

[Als de volledige reeks niet lukt, bereken dan de eerste twee niet-nul termen.]

(b) Bereken de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} x^{2k+1}.$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 Beschouw het vectorveld

$$\vec{F} = (xy^2, -yx^2, z).$$

Zij C de cirkel in het xy-vlak met straal R rond de oorsprong. De cirkel is de rand van de schijf

$$S_1 : \, x^2 + y^2 \leq R^2, \, z = 0,$$

en ook van het halve boloppervlak

$$S_2 : \, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \, z \geq 0.$$

(a) Bereken rot $\vec{F}$ en div $\vec{F}$.

(b) Bereken de kringintegraal

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{t} \, ds.$$

(c) Bereken de flux

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

met $\vec{n}$ de naar boven wijzende normaal op S_2.

Antwoord: