Examen Wiskunde II
1ste bachelor Geologie
maandag 7 juni 2010, 8:30–13:00

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Simon Allewaert, Carla Jacobs, Eva Leenknegt, Sven Raum, Kristof Schoels, of Johan Van Kerckhoven).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

met

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en $p \in \mathbb{R}$.

(a) Bereken de oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

(b) Geef de oplossingen van het stelsel

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voor welke p is het stelsel strijdig ? Voor welke p zijn er oneindig veel oplossingen ?

(c) Voor welke p zijn de kolomvectoren van A onderling orthogonaal ?

Hoe kunt u deze eigenschap gebruiken om de inverse matrix A^{-1} makkelijk uit te rekenen?

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 De 2×2 matrix B heeft eigenwaarden $\lambda_1 = i$ en $\lambda_2 = -i$ met bijbehorende eigenvectoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \quad \text{(bij eigenwaarde } i\text{)} \qquad \text{en} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \quad \text{(bij eigenwaarde } -i\text{)}$$

(a) Bereken B.

(b) Bereken B^{2010}.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Een eenvoudig model voor de groei van tumoren wordt gegeven door de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = -ax \ln\left(\frac{x}{K}\right)$$

waarin $x(t)$ de massa van het tumor is op tijdstip t. Hierin zijn $a > 0$ en $K > 0$ positieve constanten.

(a) Los de differentiaalvergelijking op met beginwaarde $x(0) = x_0 > 0$.

(b) Is de oplossing stijgend of dalend? Uw antwoord mag afhangen van de waarde van x_0. Bestaat de limiet

$$\lim_{t\to\infty} x(t)\,?$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Beschouw het stelsel van differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= \sin(2x - y) \end{aligned}$$

(a) Bereken de evenwichtspunten.

(b) Onderzoek de stabiliteit van de evenwichten

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \frac{x}{1+x^3}$$

Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is deze Maclaurinreeks convergent?

(b) Bereken de Fourierreeks van de 2π-periodieke functie g die op $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(c) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de Fourierreeks uit onderdeel (b) convergent? Wat is de waarde van de Fourierreeks in $x = \pi$?

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 (a) Bereken $\int_C \vec{F} \cdot \vec{t} ds$ waarin $\vec{F} = (x^2, 2y^2)$ en C is de kromme bestaande uit het interval $-R \leq x \leq R$, $y = 0$ gevolgd door de bovenste helft van de cirkel rond $(0, 0)$ met straal R.

(b) Bereken de oppervlakte-integraal

$$\iint_S z\, dS$$

waarin S het deel is van de eenheidssfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ met $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Antwoord: