Examen Wiskunde II
1ste bachelor Geologie
dinsdag 18 augustus 2009, 8:30–13:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; zonder los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent (Eva Leenknegt, Leen Prenen of Christophe Smet).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -b & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bespreek de oplosbaarheid en geef de oplossing van het stelsel

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \end{pmatrix}$$

in functie van de parameter $b \in \mathbb{R}$.

(b) Voor welke $b \in \mathbb{R}$ is de matrix A inverteerbaar? Bereken voor deze waarden van b de matrix A^{-1}.

(c) Voor welke $b \in \mathbb{R}$ heeft de matrix A alleen reële eigenwaarden?

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Beschouw een populatiemodel met twee soorten X en Y. De populatiegrootte van X na k jaar wordt aangeduid met x_k en die van Y met y_k. We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}\,(x_k + 2a\,y_k) \qquad \text{en} \qquad y_{k+1} = \frac{1}{8}\,(2\,y_k + a\,x_k)$$

waarin $a > 1$ een constante is.

(a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de karakteristieke veelterm en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van a).

(b) Voor welke waarden van a treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

(c) Voor welke a is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $x_0 = 300$ en $y_0 = 100$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 (a) Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \cos \omega t$$

met $\omega \geq 0$.

(b) Geef de speciale oplossing die voldoet aan $x(0) = 0$ en $x'(0) = 0$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} u' &= u^2 - v^2 \\ v' &= u^2 v - 8 \end{aligned}$$

voor twee functies $u(t)$ en $v(t)$.

(a) Bereken de reële evenwichtspunten.

(b) Lineariseer rond de evenwichtspunten.

(c) Onderzoek de stabiliteit van de evenwichtspunten.

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{voor } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bereken de Maclaurin reeks van f.

(b) Laat zien dat de Fourier-getransformeerde van f gelijk is aan

$$g(y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y \sin(\pi y)}{4 - y^2}.$$

(c) Gebruik het resultaat uit (b) om de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \sin(\pi y)}{4 - y^2} \, dy$$

te berekenen.

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 S is het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ met $z \geq 1$. Hierin is $R > 1$ een gegeven waarde. De rand van S is de cirkel C.

(a) Bereken de oppervlakte van S.

(b) Bereken de integraal

$$\oint_C (x - y + z)\, ds.$$

(c) Bereken de integraal

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

waarin $\vec{F} = (-x, 0, y)$. De eenheidsnormaal $\vec{n}$ op S wijst naar boven.

Antwoord: