Examen Wiskunde II
Bachelor Informatica
maandag 11 juni 2012, 8:30–12:30
Auditorium MTM.0013 en MTM.0039

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Simon Allewaert, Berdien Peeters, Bart Jacobs).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $p \in \mathbb{R}$ en

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke waarden van p is de matrix A inverteerbaar?
[U hoeft de inverse matrix A^{-1} niet uit te rekenen.]

(b) Bepaal p zodanig dat de drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ onderling loodrecht staan.

(c) Bepaal alle waarden van p waarvoor het stelsel

$$A\vec{x} = \vec{x}$$

een oplossing $\vec{x} \neq \vec{0}$ heeft.

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Zij

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} q \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

met $q \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal q zodanig dat de drie vectoren linear afhankelijk zijn.

(b) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix}$$

voor de waarde van q die u in (a) gevonden hebt. Is de matrix B diagonaliseerbaar?

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Bij een chemische reactie $A + 2B \to 3C$ voldoen de concentraties $a(t)$, $b(t)$ en $c(t)$ van de stoffen A, B en C aan de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{da}{dt} = -rab^2, \quad \frac{db}{dt} = -2rab^2, \quad \frac{dc}{dt} = 3rab^2$$

met $r > 0$ de reactieconstante. We nemen beginwaarden

$$a(0) = 1, \quad b(0) = 2, \quad \text{en} \quad c(0) = 0.$$

(a) Laat zien dat $b-2a$ en $c+3a$ constant zijn in de tijd. Wat zijn die constante waarden?

(b) Laat zien dat de differentiaalvergelijking voor a geschreven kan worden als

$$\frac{da}{dt} = -4ra^3$$

en los deze differentiaalvergelijking op.

(c) Bereken

$$\lim_{t \to +\infty} c(t).$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 In een gebied met marters en woelmuizen ontwikkelen de twee populaties zich volgens de vergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{3xy}{x+1}$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y + \frac{3xy}{x+1}$$

met $K > 0$.

(a) Welke van de twee veranderlijken x en y heeft betrekking op de populatie van de marters (de roofdieren) en welke op die van de woelmuizen (de prooidieren) ?

(b) Bereken de evenwichtspunten van dit stelsel. Voor welke $K > 0$ is er een evenwicht (x_0, y_0) met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$?

De verdere vragen betreffen het evenwichtspunt uit onderdeel (b) met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$.

(c) Laat zien dat het gelineariseerde stelsel voor dit evenwicht gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} \xi'(t) \\ \eta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2K-10}{3K} & -2 \\ \frac{K-2}{3K} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

(d) Voor welke K treedt spiraliserend gedrag op van de oplossingen rond het evenwichtspunt?

(e) Onderzoek de stabiliteit van het evenwichtspunt. U mag u hierbij beperken tot de waarden van K waarvoor spiraliserend gedrag optreedt.

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 We beschouwen de functie

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{als } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

en haar Fouriergetransformeerden $u(y)$ en $v(y)$ in de goniometrische vorm zoals gegeven door formules (5.2.3) uit de cursus.

(a) Laat zien dat

$$v(y) = \frac{2}{\pi}\frac{y}{1-y^2}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

(b) Bepaal $u(y)$.

(c) Gebruik (a) en (b) om de integraal

$$\int_0^\infty \frac{y\sin(\pi y)}{1-y^2}dy$$

te berekenen.

[Hint: Denk aan de inverse Fouriertransformatie (5.2.4) en bedenk ook dat $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.]

Antwoord: