Examen G0O17E Wiskunde II (3sp)
maandag 10 juni 2013, 8:30-11:30 uur

Bachelor Geografie en Bachelor Informatica

Auditorium De Molen: A–D

Auditorium MTM.00.13: E-Se

Auditorium MTM.00.39: Sh-Z

Naam:

Studierichting:

Naam assistent:

- Het examen bestaat uit 3 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen. Kladbladen hoeft u niet in te leveren.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent: (Simon Allewaert, Hilde Hoegaerts, Daan Michiels, Berdien Peeters, Jasper Van Hirtum).
- Succes!

Vraag 1 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ k^2 - 7 \end{pmatrix}.$$

Hierin is $k \in \mathbb{R}$.

4pt (a) Los het stelsel $A\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 3k+6 \\ 5k+2 \end{pmatrix}$ op.

Geef de waarden van k waarvoor er (i) geen oplossing is, (ii) een unieke oplossing is, (iii) meer dan één oplossing is.

2pt (b) Geef een eenheidsvector die loodrecht staat op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$.

2pt (c) Bepaal het vlak door $\vec{c}$ dat loodrecht staat op de rechte door $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Voor welke waarde van k gaat dit vlak door de oorsprong?

2pt (d) Voor welke waarden van k is $\lambda = -1$ een eigenwaarde van A ?

Antwoord:

(a) Het stelsel $A\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 3k+6 \\ 5k+2 \end{pmatrix}$ laat zich herschrijven als

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & k^2-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3k+6 \\ 5k+2 \end{pmatrix}.$$

Om het stelsel op te lossen passen we de nodige elementaire rij-operaties toe op de uitgebreide matrix van het stelsel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 3 & 1 & 7 & 3k+6 \\ 4 & 2 & k^2-7 & 5k+2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & k^2-15 & k+2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & k^2-16 & k-4 \end{array}\right) \qquad (1)$$

De laatste regel van de matrix laat zich herschrijven als $(k^2 - 16)z = k - 4$. Wanneer $k^2 - 16 \neq 0$ (d.w.z. $k \neq 4$ en $k \neq -4$) kunnen we hieruit de waarde van z halen. We maken dus een gevalsonderscheid.

Geval $k \neq 4$ en $k \neq -4$: In dit geval is

$$z = \frac{k-4}{k^2-16} = \frac{1}{k+4}.$$

Verder lezen we uit de tweede regel van de matrix af dat $-2y + z = 6$, dus

$$y = \frac{6-z}{-2} = -3 + \frac{z}{2} = -3 + \frac{1}{2k+8} = \frac{-6k-23}{2k+8}.$$

Tenslotte halen we de waarde van x uit de eerste regel van de matrix. Omdat $x+y+2z = k$, besluiten we dat

$$\begin{aligned} x = k - y - 2z &= k - \frac{-6k-23}{2k+8} - \frac{2}{k+4} \\ &= \frac{2k^2+8k+6k+23-4}{2k+8} = \frac{2k^2+14k+19}{2k+8}. \end{aligned}$$

In dit geval heeft het stelsel dus 1 oplossing, namelijk

$$\vec{x} = \left(\frac{2k^2+14k+19}{2k+8}, -\frac{6k+23}{2k+8}, \frac{1}{k+4}\right)^T.$$

Geval $k = 4$: Wanneer we in (1) k gelijk aan 4 nemen, wordt de laatste rij een nulrij. We mogen z dus willekeurig kiezen: Zeg $z = t$ met $t \in \mathbb{R}$. Dan volgt uit de tweede vergelijking dat $y = \frac{6-z}{-2} = -3 + \frac{t}{2}$. Uit de eerste vergelijking volgt nu dat $x = 4 - y - 2z = 4 + 3 - \frac{t}{2} - 2t = 7 - \frac{5t}{2}$. We besluiten dat het stelsel nu oneindig veel oplossingen heeft, namelijk alle drietallen van de vorm

$$\vec{x} = \left(7 - \frac{5t}{2}, -3 + \frac{t}{2}, t\right)^T$$

met t een willekeurig reëel getal.

Geval $k = -4$: Wanneer we in (1) k vervangen door -4, wordt de laatste rij $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$. Het linkerlid van de vergelijking is dus $0x + 0y + 0z$, terwijl het rechterlid -8 is. Het is duidelijk dat deze vergelijking voor geen enkele waarde van x, y en z kan opgaan. Het stelsel is strijdig en heeft geen oplossingen.

(b) Het vectorproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ staat loodrecht op beide vectoren. We berekenen dus

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We zochten echter een *eenheidsvector* die loodrecht staat op $\vec{a}$ en $\vec{b}$. We moeten de vector $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T$ die we zonet vonden dus nog normeren. Hiervoor delen we de vector door zijn lengte $\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. We vinden de vector

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(c) Om de richting van de rechte door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te bepalen, berekenen we eerst de verschilvector

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dit is een normaalvector voor het gezochte vlak. Het vlak heeft bijgevolg de vergelijking

$$0x + 2y + 2z = d$$

waarin d zo gekozen moet worden dat $\vec{c}$ in het vlak licht. Dus

$$d = 2 \cdot 7 + 2 \cdot (k^2 - 7) = 2k^2$$

en het vlak is $2y + 2z = 2k^2$ hetgeen te vereenvoudigen is tot

$$y + z = k^2.$$

Het vlak gaat door de oorsprong wanneer het punt $(0, 0, 0)$ aan de vergelijking voldoet. Dit gebeurt wanneer $0 = k^2$. We besluiten dat het vlak door de oorsprong gaat als en slechts als $k = 0$.

(d) Een waarde λ is een eigenwaarde van A als en slechts als $\det(A - \lambda I) = 0$. De matrix A heeft dus $\lambda = -1$ als eigenwaarde wanneer $\det(A + I) = 0$. We berekenen eerst de gezochte determinant door te ontwikkelen naar de eerste rij.

$$\begin{aligned}\det(A + I) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & k^2 - 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & k^2 - 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & k^2 - 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(2k^2 - 12 - 14) - (3k^2 - 18 - 28) + 2(6 - 8) \\ &= k^2 - 10 \end{aligned}$$

Deze determinant is nul wanneer $k^2 = 10$. Er zijn dus twee waarden van k waarvoor $\lambda = -1$ een eigenwaarde is van A, namelijk $k = \sqrt{10}$ en $k = -\sqrt{10}$.

Vraag 2

5pt (a) Vind alle oplossingen van het lineaire stelsel $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = -4y + 2x \end{cases}$

Geef de oplossingen in reële vorm.

5pt (b) Bereken de evenwichtspunten van het niet-lineaire stelsel $\begin{cases} x' = -2x - y^2 \\ y' = -4y + 2x \end{cases}$

en bepaal de stabiliteit van elk van de evenwichtspunten.

Antwoord:

(a) Wanneer we het lineaire stelsel in matrixvorm schrijven, ziet het er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

We zoeken eerst de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix (die we met A zullen noteren). Hiervoor berekenen we de volgende determinant:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-4-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 + 6\lambda + 10. \end{aligned}$$

De matrix A heeft λ als eigenwaarde wanneer $\det(A - \lambda I) = 0$. We zoeken dus de nulpunten van $\lambda^2 + 6\lambda + 10$, en we vinden $\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = -3 \pm i$.

Vervolgens zoeken we een eigenvector $\vec{x}$ bij een van beide eigenwaarden, bijvoorbeeld voor $\lambda = -3 + i$. Dit betekent dat $\vec{x}$ zodanig gekozen moet worden dat $A\vec{x} = (-3+i)\vec{x}$. Voor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ moeten we dus het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{cases} -2x - y &= (-3+i)x \\ 2x - 4y &= (-3+i)y \end{cases}$$

Dit is equivalent met

$$\begin{cases} (1-i)x - y &= 0 \\ 2x + (-1-i)y &= 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen zijn equivalent met $y = (1-i)x$. We vinden daarom $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ als (mogelijke) eigenvector.

Een oplossing van het gegeven stelsel differentiaalvergelijkingen is dus, in complexe vorm, gegeven door

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-3+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Het reëel deel en het imaginair deel van deze oplossing vormen samen een reële basis voor de oplossingsverzameling. We herschrijven eerst

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-3+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^{-3t}(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Hieruit halen we dat

$$\mathrm{Re} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

en

$$\mathrm{Im} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Nu kunnen we de algemene oplossing van het stelsel in haar reële vorm schrijven:

$$\begin{cases} x(t) &= c_1\, e^{-3t}\cos(t) + c_2\, e^{-3y}\sin(t) \\ y(t) &= c_1\, e^{-3t}(\cos(t) + \sin(t)) + c_2\, e^{-3t}(\sin(t) - \cos(t)) \end{cases}$$

voor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Een stelsel van differentiaalvergelijkingen bereikt een evenwichtspunt wanneer de afgeleiden van de betrokken functies nul zijn. In dit geval zoeken we dus wanneer $x'(t) = y'(t) = 0$. We lossen het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} -2x - y^2 &= 0 \\ -4y + 2x &= 0 \end{cases}$$

Wanneer we beide vergelijkingen bij elkaar optellen vinden we $-y^2 - 4y = 0$, dus $y(y+4) = 0$. We vinden twee oplossingen: $y = 0$ en $y = -4$. Als $y = 0$ halen we uit de tweede vergelijking dat $x = 0$. Als $y = -4$ halen we uit de tweede vergelijking dat $x = -8$. Er zijn dus twee evenwichtspunten: $(0,0)$ en $(-8,-4)$.

Om de stabiliteit van de evenwichten na te gaan, moeten we het teken onderzoeken van de eigenwaarden van de matrix met partiële afgeleiden:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-2x - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(-2x - y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2x - 4y) & \frac{\partial}{\partial y}(2x - 4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Voor het eerste evenwichtspunt $(0,0)$ is deze matrix een bovendriehoeksmatrix $\begin{pmatrix} -2 & -2y \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. De eigenwaarden staan op de diagonaal

$$\lambda_1 = -2 \qquad \text{en} \qquad \lambda_2 = -4.$$

Omdat beide eigenwaarden negatief zijn, besluiten we dat $(0,0)$ een stabiel evenwicht is.

Voor het tweede evenwichtspunt $(-8,-4)$ is de matrix

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

We berekenen de eigenwaarden

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-4-\lambda) - 16 = \lambda^2 + 6\lambda - 24.$$

Hieruit volgt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+96}}{2} = -3 \pm \sqrt{17}.$$

Omdat $\sqrt{17} > 4$, is $-3+\sqrt{17} > 1$. Deze eigenwaarde is dus zeker positief. We besluiten dat de eigenwaarden niet allebei negatief zijn, dus $(-8,-4)$ is een instabiel evenwicht.

Vraag 3

3pt (a) Geef de Maclaurinreeks van de functie $f(x) = x\sin(2x)$.

7pt (b) Bereken de Fourierreeks van $f(x) = x\sin(2x)$ over het interval $[-\pi, \pi]$.

Hint bij (b): ga na of f een even of oneven functie is en maak gebruik van de formules

$$\int x\sin(ax)\sin(bx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos((a-b)x)}{(a-b)^2} - \frac{\cos((a+b)x)}{(a+b)^2}\right] + \frac{x}{2}\left[\frac{\sin((a-b)x)}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right] + C$$

$$\int x\sin(ax)\cos(bx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a+b)x)}{(a+b)^2} + \frac{\sin((a-b)x)}{(a-b)^2}\right] - \frac{x}{2}\left[\frac{\cos((a+b)x)}{a+b} + \frac{\cos((a-b)x)}{a-b}\right] + C$$

die alleen gelden als $a \neq b$.

Antwoord:

(a) We weten dat de Maclaurinreeks van de sinusfunctie gegeven wordt door

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Door x te vervangen door $2x$ vinden we

$$\sin(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Vermenigvuldigen met x geeft ons de Maclaurinreeks van de gevraagde functie:

$$f(x) = x\sin(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+2}}{(2k+1)!}.$$

(b) We berekenen eerst de coëfficiënten a_n. Hiervoor moeten we de volgende integraal berekenen:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)\cos(nx)dx.$$

Omdat $\cos(nx)$ even is en f even, is de integrand even. Dus

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2x)\cos(nx)dx.$$

Wanneer $n \neq 2$, kunnen we de formule in de hint gebruiken om de integraal op te lossen. We vinden dan

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\sin((2+n)x)}{(2+n)^2} + \frac{1}{2}\frac{\sin((2-n)x)}{(2-n)^2} - \frac{x}{2}\frac{\cos((2+n)x)}{2+n} - \frac{x}{2}\frac{\cos((2-n)x)}{2-n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0+0-\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{2+n} - \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{2-n} - 0 - 0 + 0 + 0\right) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{4}{(2-n)(2+n)} \\
&= (-1)^n\frac{4}{n^2-4}, \qquad n \neq 2.
\end{aligned}$$

Merk op dat we hier gebruikten dat

$$\sin(k\pi) = 0, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k \qquad \text{voor } k \in \mathbb{Z}.$$

In het bijzonder is

$$a_0 = -1, \qquad a_1 = \frac{4}{3}.$$

Voor $n = 2$ moeten we de coëfficiënt apart berekenen. We gebruiken eerst de verdubbelingsformule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, zodat

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2x)\cos(2x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(4x)dx$$

en daarna passen we partiële toe:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(4x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x}{4}\cos(4x)\right]_0^\pi + \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \cos(4x)dx = \frac{1}{\pi}\frac{-\pi}{4} + \frac{1}{16\pi}\left[\sin(4x)\right]_0^\pi = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we ook de coëfficiënten b_n. Deze zijn gedefinieerd via de volgende integraal:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x\sin(2x)\sin(nx)dx.$$

Omdat f even is en $\sin(nx)$ oneven, is de bovenstaande integrand oneven. Wanneer we deze integreren op het interval $[-\pi, \pi]$ krijgen we dus nul. We besluiten dat $b_n = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Nu we alle coëfficiënten berekend hebben, kunnen we de Fourierreeks opstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
&= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \cos(nx) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cos(x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2 - 4} \cos(nx).
\end{aligned}
$$