Examen G0O17D Wiskunde II (6sp)
maandag 10 juni 2013, 8:30-12:30 uur

Bachelor Biochemie & Biotechnologie
Bachelor Chemie, Bachelor Geologie
Schakelprogramma Master Biochemie & Biotechnologie
en Schakelprogramma Master Chemie

Naam:

Studierichting:

Naam assistent:

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen. Kladbladen hoeft u niet in te leveren.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent: (Simon Allewaert, Sofie Burggraeve, Stief Gijsen, Karel Kenens, Berdien Peeters, Kristof Schoels).
- Succes!

Vraag 1 Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ k^2 - 7 \end{pmatrix}.$$

Hierin is $k \in \mathbb{R}$.

4pt (a) Los het stelsel $A\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 3k+6 \\ 5k+2 \end{pmatrix}$ op.

Geef de waarden van k waarvoor er (i) geen oplossing is, (ii) een unieke oplossing is, (iii) meer dan één oplossing is.

2pt (b) Geef een eenheidsvector die loodrecht staat op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$.

2pt (c) Bepaal het vlak door $\vec{c}$ dat loodrecht staat op de rechte door $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Voor welke waarde van k gaat dit vlak door de oorsprong?

2pt (d) Voor welke waarden van k is $\lambda = -1$ een eigenwaarde van A ?

Antwoord:

(a) Het stelsel $A\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 3k+6 \\ 5k+2 \end{pmatrix}$ laat zich herschrijven als

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & k^2-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3k+6 \\ 5k+2 \end{pmatrix}.$$

Om het stelsel op te lossen passen we de nodige elementaire rij-operaties toe op de uitgebreide matrix van het stelsel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 3 & 1 & 7 & 3k+6 \\ 4 & 2 & k^2-7 & 5k+2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & k^2-15 & k+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & k^2-16 & k-4 \end{array}\right) \quad (1)$$

De laatste regel van de matrix laat zich herschrijven als $(k^2-16)z = k-4$. Wanneer $k^2-16 \neq 0$ (d.w.z. $k \neq 4$ en $k \neq -4$) kunnen we hieruit de waarde van z halen. We maken dus een gevalsonderscheid.

Geval $k \neq 4$ en $k \neq -4$: In dit geval is

$$z = \frac{k-4}{k^2-16} = \frac{1}{k+4}.$$

Verder lezen we uit de tweede regel van de matrix af dat $-2y+z=6$, dus

$$y = \frac{6-z}{-2} = -3 + \frac{z}{2} = -3 + \frac{1}{2k+8} = \frac{-6k-23}{2k+8}.$$

Tenslotte halen we de waarde van x uit de eerste regel van de matrix. Omdat $x+y+2z=k$, besluiten we dat

$$\begin{aligned} x = k-y-2z &= k - \frac{-6k-23}{2k+8} - \frac{2}{k+4} \\ &= \frac{2k^2+8k+6k+23-4}{2k+8} = \frac{2k^2+14k+19}{2k+8}. \end{aligned}$$

In dit geval heeft het stelsel dus 1 oplossing, namelijk

$$\vec{x} = \left(\frac{2k^2+14k+19}{2k+8}, -\frac{6k+23}{2k+8}, \frac{1}{k+4} \right)^T.$$

Geval $k=4$: Wanneer we in (1) k gelijk aan 4 nemen, wordt de laatste rij een nulrij. We mogen z dus willekeurig kiezen: Zeg $z=t$ met $t \in \mathbb{R}$. Dan volgt uit de tweede vergelijking dat $y = \frac{6-z}{-2} = -3 + \frac{t}{2}$. Uit de eerste vergelijking volgt nu dat $x = 4-y-2z = 4+3-\frac{t}{2}-2t = 7-\frac{5t}{2}$. We besluiten dat het stelsel nu oneindig veel oplossingen heeft, namelijk alle drietallen van de vorm

$$\vec{x} = \left(7 - \frac{5t}{2}, -3 + \frac{t}{2}, t\right)^T$$

met t een willekeurig reëel getal.

Geval $k = -4$: Wanneer we in (1) k gelijk stellen aan -4, dan wordt de laatste rij $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$. Het linkerlid van de vergelijking is dus $0x + 0y + 0z$, terwijl het rechterlid -8 is. Het is duidelijk dat deze vergelijking voor geen enkele waarde van x, y en z kan opgaan. Het stelsel is strijdig en heeft geen oplossingen.

(b) Het vectorproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ staat loodrecht op beide vectoren. We berekenen dus

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We zochten echter een *eenheidsvector* die loodrecht staat op $\vec{a}$ en $\vec{b}$. We moeten de vector $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T$ die we zonet vonden dus nog normeren. Hiervoor delen we de vector door zijn lengte $\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. We vinden de vector

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(c) Om de richting van de rechte door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te bepalen, berekenen we eerst de verschilvector

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dit is een normaalvector voor het gezochte vlak. Het vlak heeft bijgevolg de vergelijking

$$0x + 2y + 2z = d$$

waarin d zo gekozen moet worden dat $\vec{c}$ in het vlak licht. Dus

$$d = 2 \cdot 7 + 2 \cdot (k^2 - 7) = 2k^2$$

en het vlak is $2y + 2z = 2k^2$ hetgeen te vereenvoudigen is tot

$$y + z = k^2.$$

Het vlak gaat door de oorsprong wanneer het punt $(0, 0, 0)$ aan de vergelijking voldoet. Dit gebeurt wanneer $0 = k^2$. We besluiten dat het vlak door de oorsprong gaat als en slechts als $k = 0$.

(d) Een waarde λ is een eigenwaarde van A als en slechts als $\det(A - \lambda I) = 0$. De matrix A heeft dus $\lambda = -1$ als eigenwaarde wanneer $\det(A + I) = 0$. We berekenen eerst de gezochte determinant door te ontwikkelen naar de eerste rij.

$$\begin{aligned}
\det(A+I) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & k^2-6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & k^2-6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & k^2-6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2(2k^2 - 12 - 14) - (3k^2 - 18 - 28) + 2(6 - 8) \\
&= k^2 - 10
\end{aligned}$$

Deze determinant is nul wanneer $k^2 = 10$. Er zijn dus twee waarden van k waarvoor $\lambda = -1$ een eigenwaarde is van A, namelijk $k = \sqrt{10}$ en $k = -\sqrt{10}$.

Vraag 2

5pt (a) Vind alle oplossingen van het lineaire stelsel $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = -4y + 2x \end{cases}$

Geef de oplossingen in reële vorm.

5pt (b) Bereken de evenwichtspunten van het niet-lineaire stelsel $\begin{cases} x' = -2x - y^2 \\ y' = -4y + 2x \end{cases}$

en bepaal de stabiliteit van elk van de evenwichtspunten.

Antwoord:

(a) Wanneer we het lineaire stelsel in matrixvorm schrijven, ziet het er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

We zoeken eerst de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix (die we met A zullen noteren). Hiervoor berekenen we de volgende determinant:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-4-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 + 6\lambda + 10. \end{aligned}$$

De matrix A heeft λ als eigenwaarde wanneer $\det(A - \lambda I) = 0$. We zoeken dus de nulpunten van $\lambda^2 + 6\lambda + 10$, en we vinden $\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = -3 \pm i$. Vervolgens zoeken we een eigenvector $\vec{x}$ bij een van beide eigenwaarden, bijvoorbeeld voor $\lambda = -3+i$. Dit betekent dat $\vec{x}$ zodanig gekozen moet worden dat $A\vec{x} = (-3+i)\vec{x}$. Voor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ moeten we dus het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{cases} -2x - y &= (-3+i)x \\ 2x - 4y &= (-3+i)y \end{cases}$$

Dit is equivalent met

$$\begin{cases} (1-i)x - y &= 0 \\ 2x + (-1-i)y &= 0 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen zijn equivalent met $y = (1-i)x$. We vinden daarom $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ als (mogelijke) eigenvector.

Een oplossing van het gegeven stelsel differentiaalvergelijkingen is dus, in complexe vorm, gegeven door

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-3+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Het reëel deel en het imaginair deel van deze oplossing vormen samen een reële basis voor de oplossingsverzameling. We herschrijven eerst

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(-3+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^{-3t}(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Hieruit halen we dat

$$\mathrm{Re} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

en

$$\mathrm{Im} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Nu kunnen we de algemene oplossing van het stelsel in haar reële vorm schrijven:

$$\begin{cases} x(t) &= c_1\, e^{-3t}\cos(t) + c_2\, e^{-3y}\sin(t) \\ y(t) &= c_1\, e^{-3t}(\cos(t) + \sin(t)) + c_2\, e^{-3t}(\sin(t) - \cos(t)) \end{cases}$$

voor $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Een stelsel van differentiaalvergelijkingen bereikt een evenwichtspunt wanneer de afgeleiden van de betrokken functies nul zijn. In dit geval zoeken we dus wanneer $x'(t) = y'(t) = 0$. We lossen het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} -2x - y^2 &= 0 \\ -4y + 2x &= 0 \end{cases}$$

Wanneer we beide vergelijkingen bij elkaar optellen vinden we $-y^2 - 4y = 0$, dus $y(y+4) = 0$. We vinden twee oplossingen: $y = 0$ en $y = -4$. Als $y = 0$ halen we uit de tweede vergelijking dat $x = 0$. Als $y = -4$ halen we uit de

tweede vergelijking dat $x = -8$. Er zijn dus twee evenwichtspunten: $(0, 0)$ en $(-8, -4)$.
Om de stabiliteit van de evenwichten na te gaan, moeten we het teken onderzoeken van de eigenwaarden van de matrix met partiële afgeleiden:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-2x - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(-2x - y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2x - 4y) & \frac{\partial}{\partial y}(2x - 4y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Voor het eerste evenwichtspunt $(0, 0)$ is deze matrix een bovendriehoeksmatrix $\begin{pmatrix} -2 & -2y \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. De eigenwaarden staan op de diagonaal

$$\lambda_1 = -2 \qquad \text{en} \qquad \lambda_2 = -4.$$

Omdat beide eigenwaarden negatief zijn, besluiten we dat $(0, 0)$ een stabiel evenwicht is.
Voor het tweede evenwichtspunt $(-8, -4)$ is de matrix

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

We berekenen de eigenwaarden

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-4-\lambda) - 16 = \lambda^2 + 6\lambda - 24.$$

Hieruit volgt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 96}}{2} = -3 \pm \sqrt{17}.$$

Omdat $\sqrt{17} > 4$, is $-3 + \sqrt{17} > 1$. Deze eigenwaarde is dus zeker positief. We besluiten dat de eigenwaarden niet allebei negatief zijn, dus $(-8, -4)$ is een instabiel evenwicht.

Vraag 3

3pt (a) Geef de Maclaurinreeks van de functie $f(x) = x\sin(2x)$.

4pt (b) Beschouw de functie

$$g(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & \text{voor } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Laat zien dat de Fouriertransformatie van g (in de goniometrische vorm; zie formule (10.2.3) uit de cursus) leidt tot de functie

$$u(y) = \frac{2\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\pi^2 - y^2}.$$

Bereken zelf $v(y)$.

3pt (c) Gebruik onderdeel (b) en de inverse Fouriertransformatie om de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{4}\right)}{\pi^2 - y^2}\,dy$$

te berekenen.

Antwoord:

(a) We weten dat de Maclaurinreeks van de sinusfunctie gegeven wordt door

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Door x te vervangen door $2x$ vinden we

$$\sin(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Vermenigvuldigen met x geeft ons de Maclaurinreeks van de gevraagde functie:

$$f(x) = x\sin(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+2}}{(2k+1)!}.$$

(b) We berekenen $u(y)$ als

$$u(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos(xy)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi x)\cos(yx)dx.$$

Omdat $\cos(\pi x)$ en $\cos(yx)$ allebei even zijn, is de integrand even. Daarom is

$$u(y) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1/2}\cos(\pi x)\cos(yx)dx.$$

Het is mogelijk om deze integraal uit te rekenen door twee keer partieel te integreren. Als alternatief gebruiken we hier de goniometrische formule (omkering van de formule van Simpson) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$ om te integraal te herschrijven tot

$$u(y) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1/2}\left(\cos((\pi+y)x)+\cos((\pi-y)x)\right)dx$$

Deze integralen kunnen we direct uitrekenen en er volgt

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\pi+y)x)}{\pi+y}+\frac{\sin((\pi-y)x)}{\pi-y}\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right)}{\pi+y}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{\pi-y}\right) \end{aligned}$$

Hier merken we op dat

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{y}{2}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{y}{2}) = \cos(\tfrac{y}{2}),$$

zodat

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\pi+y}+\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\pi-y}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{(\pi-y)(\pi+y)} = \frac{2\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\pi^2-y^2}. \end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we $v(y)$:

$$v(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(xy)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi x)\sin(xy)dx.$$

Omdat $\cos(\pi x)$ even is en $\sin(xy)$ oneven, is de bovenstaande integrand een oneven functie. Wanneer we deze integreren over het symmetrische interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, krijgen we dus nul. We besluiten dat $v(y) = 0$.

(c) De formule voor de inverse Fouriertransformatie zegt dat

$$g(x) = \int_0^{\infty} u(y)\cos(xy)\,dy$$

want $v(y) = 0$ en g is continu. Deze formule geldt voor elke x. We nemen de bijzondere waarde $x = \frac{1}{4}$ en we vinden dat

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4}\right) &= \int_0^{\infty} u(y)\cos\left(\frac{y}{4}\right)\,dy \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{4}\right)}{\pi^2 - y^2}\,dy. \end{aligned}$$

Omdat zowel $\cos\left(\frac{y}{2}\right)$ als $\cos\left(\frac{y}{4}\right)$ als $\pi^2 - y^2$ even functies zijn, is het product ook een even functie. Voor de gezochte integraal geldt dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{4}\right)}{\pi^2 - y^2}\,dy = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{4}\right)}{\pi^2 - y^2}\,dy.$$

Uit het bovenstaande volgt dus dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{4}\right)}{\pi^2 - y^2}\,dy = g\left(\frac{1}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vraag 4 Zij D het gebied in het eerste kwadrant van het xy-vlak dat gegeven wordt door de ongelijkheden

$$D: \quad 0 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq \rho^2$$

voor zekere $\rho \geq 0$.

2pt (a) Schets het gebied D.

5pt (b) Bereken de volgende integraal door over te gaan op poolcoördinaten

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \, dxdy.$$

3pt (c) Leg uit hoe u aan de hand van het antwoord uit onderdeel (b) de kringintegraal

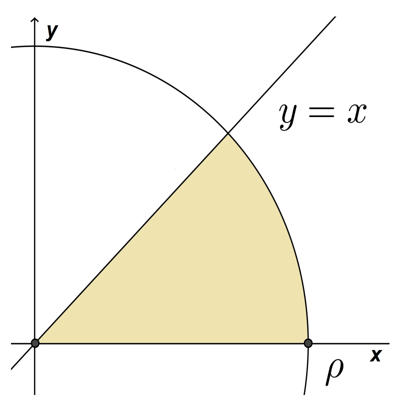
$$\oint_C \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

zou bepalen, waarin $C = \partial D$ de rand van D is.

Hint bij (b): handige goniometrische formule $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

Antwoord:

(a)



Let op dat $y \leq x$ zodat we alleen het gedeelte van de schijf hebben dat zich onder de rechte $y = x$ bevindt.

(b) Het gebied uit (a) kunnen we in poolcoördinaten beschrijven door

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \qquad \text{en} \qquad 0 \leq r \leq \rho$$

We kunnen de dubble integraal dan omvormen in

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\rho} \frac{r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot r \; dr d\theta$$

Na vereenvoudiging wordt dit

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\rho} \cos(2\theta) dr d\theta.$$

De binnenste integraal uitwerken geeft

$$\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta.$$

Dit rekenen we verder uit

$$\begin{aligned} \rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta &= \rho \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \rho \cdot \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

(c) We willen hiervoor de stelling van Green toepassen.

$$\oint_C P dx + Q dy = \int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Stel nu

$$P = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{en} \qquad Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

dan is

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

We zien dan dat

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Volgens de stelling van Green is dus

$$\oint_C \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = -2 \iint_D \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\, dxdy. = -2 \cdot \frac{\rho}{2} = -\rho$$

Vraag 5

5pt (a) Zij $\vec{F} = \left(2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y\right)$. Laat zien dat het vectorveld conservatief is en bereken

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds$$

waarin C de kromme is met parametrisatie $x = 2^{t^2+1}$, $y = t$ met $t \in [0, 1]$.

5pt (b) Zij S het noordelijk halfrond:

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 + R^2, \quad z \geq 0, \qquad R > 0.$$

De eenheidsnormaal $\vec{n}$ op S is naar boven gericht.

Bereken rot $\vec{F}$ en

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

voor het vectorveld $\vec{F} = (x, x, y)$.

Antwoord:

(a) We stellen $\vec{F} = (P, Q)$ met $P = 2x^3y^4 + x$ en $Q = 2x^4y^3 + y$. De voorwaarde voor een conservatief vectorveld is dat

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

We berekenen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 8x^3y^3, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8x^3y^3.$$

Deze zijn inderdaad gelijk en het vectorveld is dus conservatief. Hierdoor kunnen we de volgende stelling gebruiken

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds = V(B) - V(A).$$

Hierbij is A het beginpunt en B het eindpunt van de kromme. We vinden hier voor A ($t = 0$) het beginpunt $(2, 0)$ en voor B ($t = 1$) het eindpunt $(4, 1)$. Verder is V de potentiaalfunctie waarvoor geldt dat $\operatorname{grad} V = \vec{F}$.

Vervolgens gan we V berekenen. Uit $\operatorname{grad} V = \vec{F}$ volgt dat

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P = 2x^3y^4 + x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = Q = 2x^4y^3 + y.$$

Uit $\frac{\partial V}{\partial x} = 2x^3y^4 + x$ volgt door te primitiveren naar x dat

$$V(x,y) = \frac{x^4y^4}{2} + \frac{x^2}{2} + g(y).$$

Dan is

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x^4y^3 + g'(y)$$

Dit moet gelijk zijn aan $Q = 2x^4y^3 + y$, zodat we zien dat we g zodanig moeten kiezen dat $g'(y) = y$. We nemen $g(y) = \frac{y^2}{2}$ zodat

$$V(x,y) = \frac{x^4y^4}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Omdat $V(B) = V(4,1) = 136,5$ en $V(A) = V(2,0) = 2$, kunnen we nu de integraal berekenen

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds = V(4,1) - V(2,0) = 134,5.$$

(b) De rotor van $\vec{F}$ is

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (1,0,1).$$

De dubbele integraal berekenen we met de stelling van Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds = \oint_C x dx + x dy + y dz$$

De laatste gelijkheid geldt omdat $\vec{F} = (x,x,y)$. In dit geval is $C = \partial S$ de cirkel in het xy-vlak rond de oorsprong met straal R. We kunnen deze cirkel als volgt parametriseren

$$C: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \text{met } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Dan kunnen we de dubbele integraal als volgt berekenen

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS &= \int_C x\, dx + \int_C x\, dy + \int_C y\, dz \\ &= \int_0^{2\pi} R\cos\theta \cdot (-R\sin\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} R\cos\theta \cdot (R\cos\theta)\, d\theta + 0 \\ &= -\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\theta + R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

Vanwege

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta = \pi,$$

vinden we uiteindelijk

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \pi R^2.$$