Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren (6 sp.)
Bachelor of Science Wiskunde

maandag 19 augustus 2013, 14:00–18:00

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 2 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	(a) 5 pt	(b) 5 pt	
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat
$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$
geldt voor alle $B \in P(Y)$.

(c) Bewijs dat
$$\forall B \in P(Y) : \quad B = f(f^{-1}(B))$$
geldt als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Beschouw de relatie R op de verzameling $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \ldots\}$ die gegeven wordt door $(x, y) \in R$ als en slecht als $xy = m^2$ voor een zekere $m \in \mathbb{N}$.

(a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is.

(b) Geef 3 elementen uit de equivalentieklasse van $x = 12$. Is het aantal elementen in deze equivalentieklasse eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

(c) Is het aantal equivalentieklassen eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar?

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat A en B niet-lege begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Zij

$$C = \{x \cdot y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

(a) Bewijs dat C naar boven begrensd is met

$$\sup C \leq \max\{\sup(A) \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\}.$$

(b) Is het waar dat $\sup C = \sup A \cdot \sup B$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij (a_n) van reële getallen.

(b) Bewijs met behulp van de definitie dat de rij (a_n) met

$$a_n = n\left(\sqrt{n^2+p}-n\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

convergent is. Hierin is $p \geq 0$ een vast gekozen reëel getal. Wat is de limiet?

Naam:

Vraag 5 Gegeven zijn twee begrensde reële rijen (x_n) en (y_n). Definieer

$$a_n = \begin{cases} x_n & \text{als } n \text{ even is,} \\ y_n & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

(a) Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \max\left\{\limsup_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} y_n\right\}.$$

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid niet hoeft te gelden.

(c) Neem nu aan dat de twee rijen (x_n) en (y_n) convergent zijn. Bewijs dat dan

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max\left\{\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right\}.$$