Examen Lineaire Algebra

Bachelor Informatica

August 31, 2010

1. Zij V en W eindigdimensionale vectorruimten en $\mathcal{A} : V \to W$ een lineaire afbeelding. Formuleer en bewijs de dimensiestelling voor $\mathcal{A}$.

2. **(a)** Bewijs dat een maximaal vrij deel van een vectorruimte V een basis is van deze vectorruimte.

   (b) Zij $\mathcal{A} : V \to V$ een lineaire transformatie op een inproductruimte V. Zijn volgende uitspraken juist of fout? Argumenteer.

   (i) Als $\mathcal{A}$ orthogonaal is, dan is $\mathcal{A}$ inverteerbaar.

   (ii) Als $\mathcal{A}$ symmetrisch is, dan is $\mathcal{A}$ inverteerbaar.

3. Beschouw de afbeelding
   $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, y - 2z, -2x - z)$
   Zij verder $U = [(0, 0, 1), (1, 1, 1)] \subseteq \mathbb{R}^3$ een deelruimte. Bepaal dan $\varphi^{-1}(U)$.

4. Beschouw $\mathbb{R}[x, y]_{\leq 2} = \{a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y + a_5 | a_i \in \mathbb{R}\}$
   en verder $U = \{f \in \mathbb{R}[x, y]_{\leq 2} | f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 0, f(0, 1) = 0\}$.

   De optelling en vermenigvuldiging zijn op natuurlijke wijze gedefinieerd (of iets dergelijks).

   (a) Is U een linaire deelruimte? Zo ja, stel $V = U$. Zo nee, stel V gelijk aan de kleinste lineaire deelruimte van $\mathbb{R}[x, y]_{\leq 2}$ die U omvat.
   Geef de dimensie en een basis van V.

   (b) Bepaal $V' \subseteq \mathbb{R}[x, y]_{\leq 2}$ zodat $V \oplus V' = \mathbb{R}[x, y]_{\leq 2}$.

5. Zijn $N, P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P \neq O$. Bewijs: als $P = NP$ en P is een diagonaalmatrix, dan heeft N een eigenruimte die minstens $rang(P)$-dimensionaal is.

6. Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Zij V een vectorruimte van dimensie n. Zijn $U_1 \subseteq ... \subseteq U_r$ lineaire deelruimten van V. Indien $r > n + 1$, dan bestaat er een i zodanig dat $U_i = U_{i+1}$.

   (b) Zij V een vectorruimte van dimensie 3 met een basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Zij $W \subset V$ opgespannen door de vectoren $\{e_1, e_2\}$. Er bestaat een basis $\mathcal{V} = \{v1, v2, v3\}$ van V zodat $v_1 \notin W$, $v_2 \notin W$, $v_3 \notin W$.

7. Zij $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$ met $a \in \mathbb{R}$

Construeer voor elke $a \in \mathbb{R}$ een orthogonale basis (t.o.v. het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$) van eigenwaarden van M_a.