

Examen Bewijzen en redeneren 18 januari 2024

richting: bachelor Wiskunde / TWIN

beschikbare tijd: 3 uur

Vraag 1

Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie. Zij $A \subset \mathcal{P}(X)$ en $B \subset \mathcal{P}(Y)$.

- a. 2 pt. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset A \Rightarrow B \subset f(A)$$

niet hoeft te gelden.

- b. 6 pt. Bewijs dat $\forall A \in \mathcal{P}(X) : \forall B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \subset A \Rightarrow B \subset f(A)$ geldt als en slechts als f surjectief is.

Vraag 2

Voor een verzameling X definiëren we $2^X := \{f \mid f \text{ is een functie van } X \text{ naar } \{0, 1\}\}$. We definiëren nu een relatie R op 2^X als volgt:

$$(f, g) \in R \Leftrightarrow \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ is aftelbaar.}$$

- a. 6 pt. Bewijs dat R een equivalentierelatie is.
b. 2 pt. Hoeveel equivalentieklassen heeft R als X aftelbaar oneindig is: eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel? Licht uw antwoord toe.

Vraag 3

Neem aan dat A en B niet-lege, begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren dan

$$A - B := \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

- a. 2 pt. Bewijs dat $A - B$ begrensd is.
b. 6 pt. Bewijs dat $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Vraag 4

- a. 2 pt. Geef de $\varepsilon - n_0$ -definitie van convergentie van een rij $(a_n)_n$.
b. 6 pt. Bewijs met behulp van de $\varepsilon - n_0$ -definitie dat de rij $(a_n)_n$ met

$$a_n = \frac{2(n+1)^2}{n^2 + \cos n}$$

convergent is.

Vraag 5

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een strikt stijgende functie. Verder is $(a_n)_n$ een rij in $\mathbb{R}$ en is $x \in \mathbb{R}$. We nemen aan dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x)$$

- a. 2 pt. Bewijs dat $(a_n)_n$ naar boven begrensd is.
b. 6 pt. Geldt ook dat $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = x$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
Hint: omdat f strikt stijgend is, geldt $f(x - \varepsilon) < f(x) < f(x + \varepsilon)$ voor alle $\varepsilon > 0$.