Examen Analyse II
Tweede bachelor wiskunde
21 januari 2008

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. a) Zij $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ open. Herinner dat we een functie $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ een C^1-functie noemen als f partieel afleidbaar is en alle partiële afgeleiden van f continu zijn op $\mathcal{U}$. Op pagina 24 van de cursus wordt het volgende beweerd.

   Omdat f een C^1-functie is, kunnen we een $\rho > 0$ nemen zodat

$$\|(df)(x) - (df)(a)\| \leq \frac{1}{2\|A\|} \quad \textit{van zodra } \|x - a\| \leq \rho \, .$$

   Waarom is dat zo ?

   b) Op pagina 24 van de cursus staat onderaan de volgende bewering.

   ..., merken we op dat φ_y totaal afleidbaar is en dat

$$(d\varphi_y)(x) = I_n - A(df)(x) \, .$$

   Waarom is φ_y totaal afleidbaar en waarom hebben we deze formule voor $d\varphi_y$?

2. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodische functie die integreerbaar is op $[0, 2\pi]$. Met het volgende foutieve argument tonen we aan dat de Fourierreeks van een willekeurige dergelijke f convergeert. Waar zit de fout ?

   Fixeer $x \in \mathbb{R}$ en kies $\varepsilon > 0$. We weten dat

$$f(x) - s_n(x) = \int_{[-\pi,\pi]} (f(x) - f(x + y))D_n(y) \, dy \, .$$

   Definieer de functie $h : y \mapsto (f(x) - f(x + y))D_n(y)$. Omdat h integreerbaar is op $[-\pi, \pi]$, kunnen we een $\delta > 0$ nemen zodat

$$\Big| \int_{[-\delta,\delta]} h(y) \, dy \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

   Vervolgens kunnen we met woordelijk hetzelfde argument als in het bewijs van de Stelling van Dirichlet, een n_0 vinden zodat voor alle $n \geq n_0$, geldt dat

$$\Big| \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} (f(x) - f(x + y))D_n(y) \, dy \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

   Deze twee afschattingen samen, leveren ons dat $|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$. We hebben dus bewezen dat $s_n(x) \to f(x)$.

Vergeet niet vragen 3, 4 en 5 op het volgende blad.

3. a) Voor welke waarden van $\alpha > 0$ en $\beta \in \mathbb{R}$ is de functie

$$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{(\ln(x))^\alpha}{(x-1)^\beta}$$

integreerbaar ?

Hint : gebruik onder andere dat voor $x \to +\infty$, $\ln(x)$ trager groeit dan een willekeurige macht van x.

b) Op pagina 112 van de cursus wordt kort geschetst dat

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Geef hiervoor een nauwkeurig bewijs. Je mag zonder bewijs gebruik maken van het feit dat $x \mapsto \sin(x)/x$ oneigenlijk integreerbaar is op $(0, +\infty)$ met oneigenlijke integraal gelijk aan $\pi/2$.

4. Zij f een 2π-periodische functie die kwadratisch integreerbaar is op $[0, 2\pi]$. Beschouw f als vector in de Hilbertruimte $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$. Geef aan de hand van de Fouriercoëfficiënten van f, de beste benadering van f in $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$ als lineaire combinatie van de functies $x \mapsto \sin(kx)$, $k = 1, \ldots, 10$.

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, z, 0)$ en het oppervlak

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, \frac{\pi}{4}], y^2 + z^2 = \cos^2 x\} \ .$$