

Examen Analyse II

Leuven, 1 februari 2012

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
 - je cursus,
 - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
 - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van

- een zakrekenmachine of draagbare computer,
 - boeken of fotocopieën uit boeken.
- Er zijn vijf vragen en met elke vraag kan je vier punten verdienen.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes!

Stefaan Vaes

1. Zij $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een strikt stijgende rij in $\mathbb{R}$ met $r_0 = 0$ en $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1$. Zij $\alpha > 0$. Definieer de functie

$$f : [0, 1) \rightarrow [0, +\infty] : f(x) = \begin{cases} (x - r_n)^{-\alpha} & \text{als } n \in \mathbb{N} \text{ en } r_n < x < r_{n+1}, \\ +\infty & \text{als } n \in \mathbb{N} \text{ en } x = r_n. \end{cases}$$

a) Geef een formule voor $\int_{[0,1)} f(x) dx$ in termen van (r_n) en α . Bewijs deze formule.

b) Kan je $\alpha > 0$ en (r_n) zo kiezen dat $\int_{[0,1)} f(x) dx < +\infty$? Bewijs je antwoord.

2. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een afleidbare integreerbare functie die voldoet aan $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ oneigenlijk integreerbaar is en geef een formule voor de oneigenlijke integraal van $\widehat{f}$ in termen van f .

3. In welke punten van $\mathbb{R}^2$ is de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x |x - y|$$

totaal afleidbaar? Bewijs je antwoord.

4. Zij $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ kwadratisch integreerbare functies. Toon aan dat

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f * g)(x) = 0.$$

Hint. Laat je inspireren door het bewijs van de continuïteit van $f * g$.

5. Definieer $K \subset L^2(\mathbb{R})$ gegeven door

$$K = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f(-x) = 2f(x) \text{ voor bijna alle } x \geq 0\}.$$

- a) Geef een expliciete uitdrukking voor $K^\perp$ en bewijs deze uitdrukking.
b) Geef een expliciete formule voor de orthogonale projectie $p_K(f)$ van $f \in L^2(\mathbb{R})$ op K . Bewijs deze formule.