

Examen Bewijzen & Redeneren: januari 2010

10 februari 2010

Tijd: 4 u. Meer dan voldoende.

- (1) Beantwoord volgende vraagjes. Leg telkens je antwoord uit. Concrete bewijzen worden niet gevraagd.
- (a) Gegeven zijn de verzamelingen X , met $|X| = n$ en Y , met $|Y| = m$.
- (i) Bepaal het aantal functies van X naar Y .
 - (ii) Bepaal het aantal relaties van X naar Y .
- (4 ptn)
- (b) Gegeven is de verzameling $X = \{a, b, c\}$. Bepaal het aantal orderrelaties op deze verzameling. Waarom? Bepaal welke relaties totaal zijn en waarom dit zo is.
- (3 ptn)
- (c) Bepaal of de verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar zijn.
- (i) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$
 - (ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 - (iii) De verzameling van de alle eindige deelverzamelingen van de verzameling van de natuurlijke getallen.
- (3 ptn)
- (2) (a) Gegeven zijn de functies $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow Z$. Bewijs dat wanneer $g \circ f$ injectief is hieruit volgt dat f injectief is.
- (5 ptn)
- (b) Gegeven is de functie $f : X \rightarrow Y$. voor elke verzameling Z zijn de functies $g, h : Y \rightarrow Z$ gedefinieerd. Er geldt dat

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Bewijs dat hieruit volgt dat f surjectief is.

(5 ptn)

- (3) Gegeven is de verzameling X . We beschouwen alle functies van X naar $[0, 1]$. Deze verzameling van functies noteren we als $Fun(X, [0, 1])$. Op deze verzameling beschouwen we de relatie R . Een koppel functies, zeg (f, g) , behoort tot R wanneer $f^{-1}(0) \setminus g^{-1}(0)$ een aftelbare verzameling is.
- (a) Bewijs dat R transitief is.
(4 ptn)
 - (b) Is R een equivalentierelatie? Bewijs!
(3 ptn)
 - (c) Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is.
(3 ptn)
- (4) Gegeven is de rij (a_n) , gegeven door $a_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2-2}$.
- (a) Geef de definitie van convergentie van een rij van reële getallen.
(2 ptn)
 - (b) Bewijs doormiddel van de definitie van convergentie van rijen dat (a_n) convergeert naar limiet L .
(8 ptn)
- (5) Gegeven is de rij (a_n) ; gegeven door de recursierelatie $a_n = \sqrt{2 + \frac{1}{2}a_{n-1}^2}$.
Met $a_0 = 0$
- (a) Bewijs doormiddel van volledige inductie naar n dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_n < 2$.
(3 ptn)
 - (b) Bewijs dat de (a_n) een stijgende rij is.
(4 ptn)
 - (c) Bewijs dat (a_n) convergent is. Geef en bepaal limiet L van (a_n) .
(3 ptn)