Wiskundige Logica

(27/06/2011 (14u-18u))

(1) Gesloten boek, niet mondeling:

a) Bewijs de definieerbaarheid in $\mathcal{L}_{+\cdot}$ van de relatie "q is het s–de priemgetal" in de twee veranderlijken q en s op $\mathbb{N}$.

(b) "Construeer" de formule van Gödel. (Je hoeft geen bewijzen te geven.)

(2) Open boek, mondeling:

(a) Zij T een berekenbare theorie in $\mathcal{L}_{+\cdot}$. Bewijs dat als een afbeelding $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sterk representeerbaar is in T, dan is f berekenbaar.

(b) Verklaar stap (b) in het bewijs van Stelling 1 van §11: als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ functies zijn die sterk representeerbaar zijn in PA_0 door middel van een Σ_1–formule, dan is ook $g \circ f$ sterk representeerbaar in PA_0 door middel van een Σ_1–formule.

(3) Geef een trouwe vertaling in predikatenlogica–taal van de volgende bewering in Geo–werelden (relatie–identifiers `Triangle, Square, BackOf, Larger`):

"Elk vierkant dat zich achter hoogstens één driehoek bevindt, is groot."

(4) Zij $\mathfrak{M}$ een structuur met dezelfde signatuur als de taal $\mathcal{L}_{+\cdot}$. Stel dat $\mathfrak{M}$ elementair equivalent is met $\mathbb{N}$ en dat het universum M van $\mathfrak{M}$ aftelbaar is. We kunnen $\mathbb{N}$ beschouwen als deelverzameling van M via de interpretaties van $0, 1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ Veronderstel dat $\mathbb{N} \subsetneq M$. Bewijs de volgende beweringen:

(a) Als $v, w \in M$ met $v \notin \mathbb{N}$ en $v < w$, dan is $w \notin \mathbb{N}$.

(b) Zij $\theta(x)$ een formule in $\mathcal{L}_{+\cdot}$ met één vrije veranderlijke x. Stel dat er oneindig veel natuurlijke getallen n bestaan zodat $\theta(n)$ waar is in $\mathbb{N}$. Dan bestaat er een $u \in M \setminus \mathbb{N}$ zodat $\theta(u)$ waar is in M.

(c) Er bestaat een structuur $\mathfrak{M}'$ met dezelfde signatuur als $\mathcal{L}_{+\cdot}$, die elementair equivalent is met $\mathfrak{M}$, die een aftelbaar universum M' heeft dat aan $M' \supsetneq M$ voldoet, en zodat restricties van de intepretaties van $+$ en $\cdot$ in $\mathfrak{M}'$ tot M samenvallen met de interpretaties van $+$ en $\cdot$ in $\mathfrak{M}$.