Examen Numerieke Wiskunde: Oplossingen

Andreas Hinderyckx

23 juni 2020

Vraag 1: Foutenanalyse

Gegeven de formule:

$$\frac{e^x - 1}{x} \tag{1}$$

die we zullen evalueren in MATLAB.

Vraag 1.a

Wat is de relatieve conditie van de evaluatie van de formule? Beschouw ook de gevallen waarvoor $|x| \to \infty$

Antwoord

Om de conditie van het probleem te berekenen, berekenen we het relatieve conditiegetal $\delta_c y$:

$$\delta_c y = \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x = \frac{(xe^x) - (e^x - 1)}{x^2} \cdot \frac{x}{e^x - 1}\Delta x = \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}\Delta x \tag{2}$$

Nu moeten we bekijken voor welke waarden van x uitdrukking (2) groot wordt, en het probleem dus slecht geconditioneerd is. Om onze utikomsten bij deze vraag te bevestigen, kunnen we de functie plotten op het grafisch ZRM (wat ook toegelaten is op het examen) en bekomen we volgende resultaten

- Voor $x \to 0$ zal $\delta_c y \to 0.5$ en is het probleem dus goed geconditioneerd.
- Voor $x \to -\infty$ zal $\delta_c y \to 0$ en is het probleem dus goed geconditioneerd.
- Voor $x \to +\infty$ zal $\delta_c y \to 1$ en is het probleem dus goed geconditioneerd.

Vraag 1.b

Wat is de stabiliteit van deze methode? Beschouw ook de gevallen waarvoor $|x| \to \infty$

Antwoord

Om de stabiliteit van uitdrukking (1) te analyzeren, zullen we benaderen met behulp van een Taylorontwikkeling rond het de oorsprong, zoals in de oefenzittingen:

$$fl(y) \approx y + \epsilon_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_1} F(0,0,0) + \epsilon_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_2} F(0,0,0) + \epsilon_3 \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_3} F(0,0,0)$$

Hiervoor bereken we eerst $fl(y)$, met y gelijk aan uitdrukking (1):

$$\bar{y} = fl(y) = \frac{(e^x \cdot \epsilon_1 - 1)\epsilon_2}{x} \cdot \epsilon_3 = \frac{(e^x \cdot \epsilon_1 - 1)}{x} \cdot \epsilon_2 \epsilon_3 \tag{3}$$

met $\epsilon_i \leq \epsilon_{\text{mach}}$.

Nu berekenen we de partiële afgeleiden van $\bar{y}$ naar elke ϵ_i:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) &= \frac{e^x}{x} & \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_1}(0,0,0) &= \frac{e^x}{x} \\
\frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0) &= \frac{e^x - 1}{x} = y & \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_1}(0,0,0) &= y \\
\frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3) &= \frac{e^x - 1}{x} = y & \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon_1}(0,0,0) &= y
\end{aligned}$$

Dit invullen in uitdrukking (3) levert ons de volgende benadering voor y:

$$\begin{aligned}
& \bar{y} = y + \epsilon_1 \frac{e^x}{x} + \epsilon_2 y + \epsilon_3 y \\
\Rightarrow \quad & \bar{y} - y = \epsilon_1 \frac{e^x}{x} + \epsilon_2 y + \epsilon_3 y \\
\Rightarrow \quad & \frac{\bar{y} - y}{y} = \epsilon_1 \frac{e^x}{x} \frac{x}{e^x - 1} + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\bar{y} - y}{y} = \epsilon_1 \frac{e^x}{e^x - 1} + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\
\Rightarrow \quad & \left| \frac{\bar{y} - y}{y} \right| = \left| \epsilon_1 \frac{e^x}{e^x - 1} + \epsilon_2 + \epsilon_3 \right| \\
\Rightarrow \quad & \left| \frac{\bar{y} - y}{y} \right| \leq |\epsilon_1| \left| \frac{e^x}{e^x - 1} \right| + |\epsilon_2| + |\epsilon_3| \\
\Rightarrow \quad & \left| \frac{\bar{y} - y}{y} \right| \leq \epsilon_{\text{mach}} \left| \frac{e^x}{e^x - 1} + 2 \right|
\end{aligned} \tag{4}$$

We onderzoeken voor welke waarden van x uitdrukking (4) voor de relatieve fout δ_s groot wordt:

- Voor $x \to 0$ zal $\delta_s \to +\infty$ en is de methode onstabiel
- Voor $x \to -\infty$ zal $\delta_s \to 2\epsilon_{\text{mach}}$ en is de methode stabiel
- Voor $x \to +\infty$ zal $\delta_s \to 3\epsilon_{\text{mach}}$ en is de methode stabiel

Besluit
In conclusie kunnen we de volgende besluiten trekken: (zie oefenzitting 4: Conditie en Stabiliteit)[1]:

- Voor $x \to 0$ zal $\delta_s \to +\infty$, dus zal het algoritme **onstabiel** zijn.
- Voor $x \to -\infty$ zal $\delta_s y \to 2\epsilon_{\text{mach}}$, dus zal het algoritme **voorwaarts stabiel** zijn.
- Voor $x \to +\infty$ zal $\delta_s y \to 3\epsilon_{\text{mach}}$, dus zal het algoritme **voorwaarts stabiel**.

[1] De relatieve conditie en stabiliteit bepalen als volgt de stabiliteit van het algoritme:

1. $|\delta_s y|$ is groot en $|\delta_c y|$ is klein (goede conditie): het algoritme is **onstabiel**.
2. $|\delta_s y|$ is groot en $|\delta_c y|$ is ongeveer even groot (slechte conditie): het algoritme is **zwak stabiel**.
3. $|\delta_s y|$ is klein: het algoritme is **voorwaarts stabiel**.

Vraag 2: Numerieke Integratie

Gegeven volgende kwadratuurformule:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx \approx H_0(a - \frac{3h}{4}) + H_1(a) + H_2(a + \frac{3h}{4})$$

Bepaal de gewichten zodat de formule een maximale nauwkeurigheidsgraad heeft. Waaraan is deze nauwkeurigheidsgraad gelijk?

Antwoord

Om de maximale nauwkeurigheidsgraad te bekomen, berekenen we volgens de methode der onbepaalde coëfficiënten de gewichten voor de H_i's $i = 0, 1, 2 = n$ zodat de nauwkeurigheidsgraad maximaal is. Dit doen we door $n + 1 = 3$ lineaire voorwaarden op te leggen; nl. die voorwaarden zodat alle eentermen x^k, $k = 0, 1, 2$ exact geïntegreerd worden (zie p. 143 in handboek). Om de berekeningen te vereenvoudigen, werken we in de basis $(x - a), (x - a)^2, (x - a)^3 \dots$

- Graad 0:

$$\begin{aligned} H_0 + H_1 + H_2 &= \int_{a-h}^{a+h} x^0 \, dx \\ &= (a + h) - (a - h) \\ &= 2h \end{aligned} \tag{5}$$

- Graad 1:

$$\begin{aligned} H_0 \left(-\frac{3h}{4} \right) + H_2 \left(\frac{3h}{4} \right) &= \int_{a-h}^{a+h} (x - a)^1 \, dx \\ &= \int_{-h}^{+h} (x - a)^1 \, d(x - a) \\ &= \left[\frac{(x - a)^2}{2} \right]_{x-a=-h}^{x+a=h} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \quad H_0 &= H_2 \end{aligned} \tag{6}$$

- Graad 2:

$$\begin{aligned}
H_0\left(-\frac{3h}{4}\right)^2 + H_2\left(\frac{3h}{4}\right)^2 &= \int_{a-h}^{a+h} (x-a)^2\,dx \\
&= \int_{-h}^{+h} (x-a)^2\,d(x-a) \\
&= \frac{2h^3}{3} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Onze drie vrijheidsgraden zijn nu opgebruikt, maar we kunnen nog controleren of er “toevallig” nog aan hogere graads lineaire voorwaarden voldaan is:

- Graad 3:

$$\begin{aligned}
H_0\left(-\frac{3h}{4}\right)^3 + H_2\left(\frac{3h}{4}\right)^3 &=^? \int_{a-h}^{a+h} (x-a)^3\,dx \\
&= \int_{-h}^{+h} (x-a)^3\,d(x-a) \\
&= 0 \quad \checkmark \qquad (8)
\end{aligned}$$

- Graad 4:

$$\begin{aligned}
H_0\left(-\frac{3h}{4}\right)^4 + H_2\left(\frac{3h}{4}\right)^4 &=^? \int_{a-h}^{a+h} (x-a)^4\,dx \\
&= \int_{-h}^{+h} (x-a)^4\,d(x-a) \\
&= \frac{2h^5}{5} \\
&\neq 2H_0\left(\frac{3h^4}{4}\right) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Aan deze laatste lineaire voorwaarde is niet voldaan. De nauwekeurigheidsgraad is dus 3, met gewichten:

- Uit (6) en (7) volgt dat:

$$
\begin{aligned}
2H_0\left(\frac{3h}{4}\right)^2 &= \frac{2h^3}{3} \\
\Rightarrow \quad H_0 = H_2 &= \frac{2h^3}{3}\frac{16}{18h^2} \\
&= \frac{16h}{27}
\end{aligned}
$$

- En uit (5) volgt dat:

$$
H_1 = 2h - \frac{32h}{27} = \frac{22h}{27}
$$

Vraag 3: Methode van de Inverse Machten

Gegeven een bepaalde 2-bij-2-matrix A (niet zeker welke waarden deze juist bevatte, maar als je de eigenwaarden ervan berekende waren deze gelijk aan $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = 2$). Hierop passen we de methode van de inverse machten toe met beginvector $Y_0 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$. Hierna volgde nog wat uitleg hoe de methode van de inverse machten uitgevoerd werd. Verder zijn twee grafieken gegeven:

- Een grafiek die de waarde $\frac{1}{\mu}$ uitdrukt i.f.v. het aantal iteratiestappen k (Dit was een grafiek die zeer snel steeg zoals een parabool in de eerste 10 iteraties, en vervolgens afvlakte zodat je kon zien dat de methode convergeerde naar $\frac{1}{\mu} = 2$)
- Een grafiek die de relatieve fout uitdrukt i.f.v. het aantal iteratiestappen k. (Dit was een rechte met negatieve richtingscoëfficiënt)

Vraag 3.a

Verklaar de grafiek van de relatieve fout.

Antwoord

Bij deze vraag is het nogal onduidelijk wat men juist verwachtte, omdat er niet heel veel te verklaren valt aan de grafiek. Je kan zien dat de relatieve fout lineair daalt tot deze van grootte-orde $\sim 10^{-16}$ is. Verder kon je met behulp van de gegeven uitleg over de methode van de inverse machten eventueel de uitkomst van de eerste iteratie narekenen en zien dat dit overeen komt met de relatieve fout die gemaakt werd in de eerste iteratiestap.

Vraag 3.b

Waaraan zijn de convergentiefactor en de orde van convergentie gelijk?

Antwoord

Indien je de eigenwaarde van matrix A berekent, bekom je dat $\sigma(A) = \{3, 2, 2\}$. Hieruit volgt dat de convergentiefactor gelijk is aan $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{3}$. Aangezien de convergentiefactor niet-nul is, geldt dat de orde van convergentie 1 is, wat ook te zien is op de lineaire grafiek die de relatieve fouten uirdrukt i.f.v. het aantal iteratiestappen.

Vraag 3.c

Leid de convergentiefactor af enkel door gebruik te maken van de grafiek van de relatieve fout. Komt dit overeen met het resultaat dat je vond in Vraag 3.b?

Antwoord

We weten dat voor k voldoende groot geldt dat:

$$\rho \approx \frac{\epsilon^{(k)}}{\epsilon^{(k-1)}}$$

waarbij ρ de convergentiefactor en ϵ^i de fout van de i-de benadering is. Hieruit volgt dat[2]:

$$\begin{aligned}
& \log\left(\frac{\epsilon^{(k)}}{\epsilon^{(k-1)}}\right) \approx \log\rho \\
\Rightarrow \qquad & \log(\epsilon^{(k)}) \approx \log\rho + \log(\epsilon^{(k-1)}) \\
& \approx \log\rho + \Big(\log\rho + \log(\epsilon^{(k-2)})\Big) \\
& \approx \dots \\
& \approx k\log\rho + \log(\epsilon^{(0)})
\end{aligned}$$

Uiteindelijk bekomen we dat de semi-logy-plot van de fout $\epsilon^{(k)}$ t.o.v. k een rechte is met richtingscoëfficient k. De convergentiefactor ρ kunnen we bijgevolg als volgt berekenen:

$$\rho \approx e^{\frac{\ln(\epsilon^{(k+m)}) - \ln(\epsilon^{(k)})}{m}} \tag{10}$$

voor k voldoende groot. Op het examen was de grafiek van de relatieve fouten gegeven en kon je twee punten aflezen (voor k niet al te dicht bij nul zodat de initiële benaderingsfouten reeds wat gereduceerd worden door de positieve en negatieve fouten) en de bijbehorende waarden voor de relatieve fouten in uitdrukking (10) invullen om een afschatting te bekomen die gelijk was aan:

$$\sim 0.67\ldots \approx \frac{2}{3} = \rho$$

.

[2] Zie ook extra document op Toledo: "*Iteratieve methoden: bepalen van convergentiefactor en orde van convergentie*"