Examen Getaltheorie

Dries Beheydt

Dinsdag 11 juni 2019

Vraag 1

1a (mondeling)

Lemma 4.10: 'From the definition of strong pseudoprimality and from our choice of j we see that $\{[a]_n | a \in W\} \subseteq H$. Leg dit in detail uit.

1b (mondeling)

Pas theorema 7.13 aan voor mod 3.
Bijvraag: Waarom kan zo'n rechtstreeks bewijs van de stelling van Dirichlet enkel voor mod 3 en mod 4?

Vraag 2

Waar of fout? Geef tegenvoorbeeld of bewijs.

2a (mondeling)

Zij a_i een rij p-adische getallen. Als $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ convergeert, dan convergeert de integraalreeks $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i+1}$.

2b (schriftelijk)

Als $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^x \cong (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z})^x$ dan is $n_1 = n_2$.

2c (schriftelijk)

Er bestaat een vierkantswortel van -2 in $\mathbb{Q}_{11}$ met enkel even p-adische cijfers in de expansie.

Vraag 3

3a (schriftelijk)

Zij $a, b \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat voor elke oneven priemdeler (p) van $11a^4 + 2$ geldt dat $\left(\frac{-22}{p}\right) = 1$.

3b (schriftelijk)

Gebruik 3(a) om aan te tonen dat $11a^4 + 2$ geen deler is van $10b^2 + 11$.

Vraag 4 (schriftelijk)

Zij $p \neq 2$ een priemgetal. Zij $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$.
Bewijs: als $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ geen kwadraat is in $\mathbb{Q}_p$, dan heeft $a_1 \cdot x_1^2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_3^2 + a_4 \cdot x_4^2 = 0$ een oplossing in $\mathbb{Q}_p^4$.