Examen Analyse 1
20-06-08 15:00

1. Wat bedoelt men met $\frac{-\infty}{L} = +\infty$ met $L \in \mathbb{R}_0^-$ in de context van rijen? Geef ook een bewijs.

2. Zou er zo iets bestaan als een insluitstelling voor afgeleiden?

3. Toon aan dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ met $a < 1$ en $ab < 1$ de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

   goed gedefinieerd en afleidbaar is.

4. Bewijs dat de doorsnede van een verzameling van gesloten delen van een metrische ruimte opnieuw gesloten is. Bewijs dat de unie van een eindige verzameling van gesloten delen van een metrische ruimte opnieuw gesloten is.

5. Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $f : X \to X$ een surjectieve functie waarvoor er een $c > 1$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt dat:

$$d(f(x), f(y)) \geq cd(x, y)$$

   - Bewijs dat f injectief is.
   - Bewijs dat er een uniek vast punt bestaat.
   - Kun je dit unieke vaste punt vinden door een willekeurige x_0 te nemen en dan recursief $x_{n+1} = f(x_n)$ te definiëren?
   - Toon aan dat de surjectiviteit van f noodzakelijk is voor opgave b