Lineaire Algebra

Examen KULeuven (14/01/2008)

$\boxed{1}$ Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en stel dat U en W deelruimten van V zijn. Bewijs en vul aan:

$$\dim(U \cap W) + \dim(\ldots) = \dim(U) + \dim(W).$$

(<u>Hint</u>: kies op doordachte manier basissen.)

$\boxed{2}$ Zij V een eindigdimensionale inproductruimte en zij $\mathcal{E}$ een orthonormale basis van V.

(a) Leg uit wat een orthonormale basis van V is.

(b) Bewijs: als de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : V \to V$ de matrix A ten opzichte van $\mathcal{E}$ heeft, dan geldt:

$$\mathcal{A} \text{ is orthogonaal} \iff A^T = A^{-1}.$$

(c) Bestaat er een orthogonale lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zodat de matrix van $\mathcal{A}$ van de vorm

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

is ten opzichte van de standaardbasis in $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{3}$ Stel dat V een 3-dimensionale vectorruimte met basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ is en W een 2-dimensionale vectorruimte met basis $\{w_1, w_2\}$ is. Zij U de verzameling van alle lineaire afbeeldingen van V naar W. Met de volgende bewerkingen is U een vectorruimte:

$$\forall f, g \in U : \forall v \in V : (f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$\forall f \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall v \in V : (\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v).$$

(a) Bepaal een basis van U en de dimensie van U.

(b) Beschouw de verzameling

$$U' = \{f \in U \mid f(v_1 + v_2) = 0\}.$$

Toon aan dat U' een lineaire deelruimte van U is en bepaal een basis en de dimensie van U'.

(<u>Opmerking</u>: je moet niet bewijzen dat de gevonden basis wel degelijk een basis is.)

$\boxed{4}$ Zij $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding met volgende matrix ten opzichte van de standaardbasissen $\mathcal{E}_4$ van $\mathbb{R}^4$ en $\mathcal{E}_3$ van $\mathbb{R}^3$:

$$M_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een basis $\mathcal{V}_1$ van $\mathbb{R}^4$ en een basis $\mathcal{W}_1$ van $\mathbb{R}^3$ zodat de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van deze basissen van de vorm

$$M_{\mathcal{V}_1,\mathcal{W}_1}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

is, met $\mathcal{I}_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ de matrix met op de hoofddiagonaal en erboven overal 1'tjes en onder de hoofddiagonaal nullen, en met O passende nulmatrix-blokken.

(b) Bepaal een basis $\mathcal{V}_2$ van $\mathbb{R}^4$ en een basis $\mathcal{W}_2$ van $\mathbb{R}^3$ zodat de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van deze basissen van de vorm

$$M_{\mathcal{V}_2,\mathcal{W}_2}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_r & \mathbf{1}_r \\ O & O \end{pmatrix}$$

is, met $\mathbf{1}_r \in \mathbb{R}^{r\times(4-r)}$ de matrix met overal een 1.

$\boxed{5}$ Voor $a \in \mathbb{R}$ definiëren we

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -2008 & 2008 \\ 2008 & 0 & a \\ 2008 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Voor welke a is M_a diagonaliseerbaar? Bepaal voor die a een diagonaalmatrix D_a en een inverteerbare matrix P_a zodat $D_a = P_a^{-1} M_a P_a$.

$\boxed{6}$ Stel dat de matrix A rang r heeft (met $r \in \mathbb{N}_0$). Toon aan dat A kan geschreven worden als $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_r$, waarij de A_i in de som matrices met rang 1 zijn.

$\boxed{7}$ Zijn de volgende stellingen waar of niet waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Stel dat V een eindigdimensionale vectorruimte is en dat $\mathcal{A}$ een bijectieve lineaire transformatie van V is. Dan zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}^{-1}$ gelijk aan de inversen van de eigenwaarden van $\mathcal{A}$.

(b) Als een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}[x]$ naar zichzelf injectief is, dan is hij ook surjectief.