Analyse 1

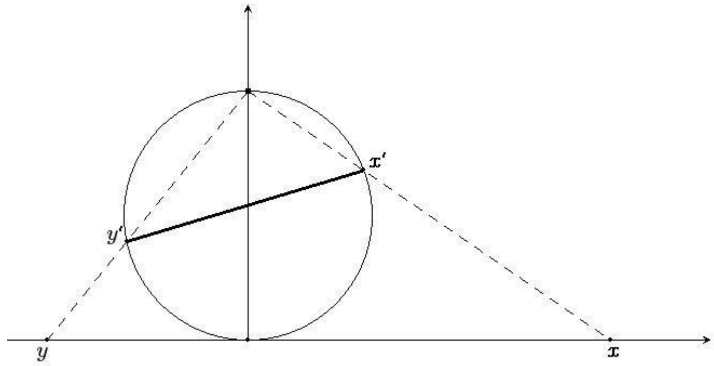
(09/06/2008)

$\boxed{1}$ In het bewijs van stelling 1.3.5 op pagina I.13 tonen we aan dat $y^n = x$ door een contradictie af te leiden uit $y^n < x$ en $y^n > x$. Werk het geval $y^n > x$ uit.

$\boxed{2}$ In hoofdstuk V hebben we functies en de continuïteit ervan veralgemeend naar functies van $\mathbb{R}^p$ naar $\mathbb{R}^q$, maar in hoofdstuk II hebben we het ook gehad over limieten van functies. Kan je dit ook naar functies van $\mathbb{R}^p$ naar $\mathbb{R}^q$ overdragen?
Als er geen zinvolle veralgemening is, geef dan aan waar het probleem zich bevindt.
Als er wel een veralgemening is, geef dan exacte definities, formuleer enkele relevante resultaten en bewijs er één van.

$\boxed{3}$ Werk het bewijs van propositie 2.14 op pagina IV.20 uit.

$\boxed{4}$ We definiëren als volgt een nieuwe metriek d op $\mathbb{R}$: verbind elk punt $x \in \mathbb{R}$ op de reële rechte met het punt $(0, 2)$. Het snijpunt van deze rechte met de cirkel met middelpunt $(0, 1)$ en straal 1 noemen we x'. We definiëren nu $d(x, y)$ als de euclidische afstand (in $\mathbb{R}^2$) tussen de beeldpunten x' en y' op de cirkel.



Beantwoord volgende vragen (nauwkeurig!) aan de hand van een tekening. Je hoeft geen expliciete uitdrukking te vinden voor $d(x, y)$, dit geeft immers geen extra inzicht.

(a) Ga na dat d een metriek is op $\mathbb{R}$.

(b) Is d topologisch fijner dan de gewone metriek op $\mathbb{R}$? En omgekeerd?

(c) Is $(\mathbb{R}, d)$ volledig?
Zo ja, bewijs. Zo neen, geef de vervollediging.

$\boxed{5}$ We noemen een metrische ruimte (X, d) *lokaal compact* als er voor elke $x \in X$ een open deelverzameling $V \subseteq X$ bestaat waarvoor geldt dat $x \in V$ en de sluiting van V compact is.

(a) Bewijs dat elke compacte metrische ruimte ook lokaal compact is.

(b) Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone metriek d. Toon aan dat $(\mathbb{R}, d)$ niet compact, maar wel lokaal compact is.

(c) Beschouw $\mathbb{Q}$ met de gewone metriek d. Toon aan dat $(\mathbb{Q}, d)$ niet lokaal compact is.