Bewijzen en Redeneren

Examen KULeuven (29/01/2008)

Puntenverdeling:

Vraag 1	(a): 3p	(b): 4p	(c): 3p
Vraag 2	(a): 3p	(b): 2p	(c): 5p
Vraag 3	(a): 3p	(b): 3p	(c): 4p
Vraag 4	10p		

$\boxed{1}$ (a) Zijn volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar?

- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- De verzameling van alle functies van $\{0,1\}$ naar $\mathbb{N}$.

Licht uw antwoord toe. (Een formeel bewijs wordt niet gevraagd.)

(b) Zoals gekend is $P(X)$ de verzameling van alle deelverzamelingen van X. Bepaal alle relaties van X naar $P(X)$ als $X = \emptyset$ en als $X = \{\emptyset\}$. Welke van deze relaties zijn functies?

(c) Is de volgende uitspraak waar of niet? Bewijs.

$$\forall x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{N} : (\forall z \in \mathbb{R} : z < 0 \Rightarrow x + z < y) \;\Rightarrow\; x < y.$$

$\boxed{2}$ Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

geldt voor alle $A \in P(X)$.

(b) Toon aan de hand van een tegenvoorbeeld dat gelijkheid in (a) niet steeds geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : A = f^{-1}(f(A))$$

als en slechts als f injectief is.

$\boxed{3}$ Stel dat $f : X \to Y$ een functie is en R een equivalentierelatie op X is. We definiëren de relaties S_1 en S_2 op Y als volgt:

$$(y_1, y_2) \in S_1 \iff \exists x_1 \in f^{-1}(y_1) : \exists x_2 \in f^{-1}(y_2) : (x_1, x_2) \in R$$
$$(y_1, y_2) \in S_2 \iff \forall x_1 \in f^{-1}(y_1) : \forall x_2 \in f^{-1}(y_2) : (x_1, x_2) \in R$$

[N.B.: Herinner U dat $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$.]

(a) Is S_1 reflexief, symmetrisch, transitief?

(b) Is S_2 reflexief, symmetrisch, transitief?

(c) Welke van de volgende beweringen is waar?

- f is surjectief $\Rightarrow$ S_1 is een equivalentierelatie.
- S_1 is een equivalentierelatie $\Rightarrow$ f is surjectief.

Bewijs al je antwoorden of geef tegenvoorbeelden.

$\boxed{4}$ Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie gegeven door

$$f(x) = \frac{a^2}{(x+a)^2},$$

waarin $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ een vast reëel getal verschillend van nul is. Bewijs aan de hand van de $\epsilon - \delta$ definitie van continuïteit dat f continu is in $x^* = 0$.