Inleiding tot de hogere wiskunde

Examen KULeuven (18/01/2008)

Theoriegedeelte (8u30-10u20, 10p.)

$\boxed{1}$ Geef de definitie van een convergente rij a_k van reële getallen. Beschouw nu de rij reële getallen a_k gedefinieerd door

$$\begin{cases} * \text{ als } k \text{ even is, zeg } k = 2n: \\ \qquad a_k = a_{2n} = \begin{cases} -1 & \text{als } n < 2007 \\ \dfrac{(-1)^n n}{2n+1} + \dfrac{1}{n!} & \text{als } n \geq 2007 \end{cases} \\ \\ * \text{ als } k \text{ oneven is, zeg } k = 2n+1: \\ \qquad a_k = a_{2n+1} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{a_{2n}}{\sqrt{2n+1}} \end{cases}$$

Identificeer (zonder bewijsvoering voor convergentie) 3 convergente deelrijen van deze rij reële getallen, elk met een verschillende convergentiewaarde.

$\boxed{2}$ (a) Bespreek de convexiteit van de functie tan : $x \mapsto \tan(x)$ op het interval $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$.

(b) Om de inverse functie van tan te definiëren hebben we de functie beperkt tot $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Waarom? Hadden we ook de functie kunnen beperken tot $]0, \pi[$? Verklaar je antwoord.

$\boxed{3}$ Gegeven is een functie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

(a) Definieer het begrip "afleidbaarheid" van de functie f en het begrip "niveau-oppervlak van f bij $c \in \mathbb{R}$".

(b) Formuleer de kettingregel.

(c) Leid vanuit de kettingregel de definitie af van richtingsafgeleide in de richting van een vector $\overrightarrow{r}$. Wanneer is de richtingsafgeleide minimaal, wanneer 0 en wanneer maximaal?

$\boxed{4}$ Definieer het begrip "partitie" van een interval $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Definieer daarna het begrip "onderintegraal" over $[\alpha, \beta]$ van een functie g van één veranderlijke. Formuleer (zonder bewijs) de hoofdstelling van de integraalrekening en gebruik deze om de afgeleide van volgende functie te bepalen:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{x^2}^{0} \frac{\cos y}{1 + y^4} dy.$$

Oefeningengedeelte (10u30-12u30, 10p.)

$\boxed{1}$ Bepaal de Maclaurin-reeksontwikkeling van de functie

$$f(x) = \frac{1}{1 + x - 2x^2}.$$

Wat is de convergentiestraal van $f(x)$, waarbij we $x \in \mathbb{C}$ nemen?
[Hint: splits $f(x)$ in partieelbreuken.]

$\boxed{2}$ Bepaal dy/dx als

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{bgcos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \\ y(t) &= \text{bgsin}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Los volgende differentiaalvergelijking in $x(t)$ op:

$$x'' + x = 2t \cos 2t \cos t.$$

[Hint: herschrijf het rechterlid aan de hand van goniometrische formules als een som van twee termen.]

$\boxed{4}$ Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(a) Geef een Cartesische vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(2, -2, 12)$. Wat is de normaal aan het raakvlak?

(b) Bepaal de kritieke punten van f.

(c) Bepaal de aard (maximum, minimum of zadelpunt) van elk kritiek punt.

$\boxed{5}$ Bereken de volgende dubbelintegraal:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$