Examen Algebra 2

25 augustus 2014

Belangrijke opmerking. Leg je antwoorden zorgvuldig uit. Geef duidelijk aan welke resultaten uit de cursustekst je gebruikt en geef een precieze referentie. Vergeet niet om op elk antwoordblad je naam te schrijven, en de bladen te nummeren.
Je mag alle resultaten uit de cursustekst en de oefeningen gebruiken, zonder ze opnieuw te bewijzen.
Let op: er zijn ook nog vragen op de achterzijde van dit blad!

Vraag 1. Zij G een einige groep, $H \subseteq G$ een normaaldeler. Zij G/H de quotiëntgroep. Noteer met $i : H \to G$ de inclusie, en met $\pi : G \to G/H$ de quotiëntafbeelding.

1. Zij $p\colon G \to K$ een groepsmorfisme dat aan volgende universele eigenschap voldoet: "zij G' een groep en $\varphi : G \to G'$ een groepsmorfisme met $\ker(\varphi) \subseteq H$. Dan bestaat er een uniek groepsmorfisme $\Psi : K \to G'$ met $\Psi \circ p = \varphi$."

   Toon aan dat er een uniek isomorfisme $\sigma\colon K \to G/H$ bestaat zodat $\sigma \circ p = \pi$. Je mag hierbij aannemen dat π zelf aan deze universele eigenschap voldoet.

2. Toon aan dat als G eindig voortgebracht is, dan is ook G/H eindig voortgebracht. Geef een voorbeeld van groepen G en H, zodat G een eindige presentatie heeft, maar G/H niet.

3. Zij S_G een verzameling, $f : S_G \to G$ een afbelding en $R_G \subseteq F_{S_G}$ een deelverzameling van de vrije groep op S_G, zodat $\langle S_G \mid R_G \rangle$ een presentatie van G is. Stel dat er een verzameling S bestaat, zodat H isomorf is met F_S. Geef een presentatie van G/H.

4. Zij $S = \{a\}$ en $T = \{b\}$, $H = F_S$ en $G = F_T$, en beschouw H als een deelgroep van G via het injectief morfisme $i\colon H \to G$ dat a afstuurt op bb. Geef een presentatie van G, H en G/H. Met welke bekende groepen zijn G, H en G/H isomorf?

Vraag 2. Zij X een verzameling en G een groep met een actie op X.

1. Toon aan: als de groepsactie van G op X transitief is, dan zijn de stabilisatoren van alle punten $x \in X$ conjugeerd in G. Is dit nog steeds juist als de groepsactie van G op X niet transitief is?

2. Zij $x \in X$ zodat de stabilisator van x een normaaldeler van G is. Toon aan dat alle punten in de orbiet van x dezelfde stabilisator hebben.

3. Zij G een groep van orde $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$. Stel dat de actie van G op X transitief is en dat er geen $x \in X$ bestaat die een stabilisator heeft met een deelgroep van graad twee. Toon aan dat alle $x \in X$ dezelfde stabilisator hebben.

4. Geef een voorbeeld van een transitieve groepsactie van een groep van orde 70 op een zelf te kiezen verzameling X en twee punten $x_1, x_2 \in X$ met verschillende stabilisatoren.

Vraag 3. Zij $u \in \mathbb{C}$ een wortel van $p(x) = x^4 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Toon aan dat $E = \mathbb{Q}(u, \sqrt{-1})$ een ontbindingsveld is van $p(x)$.
2. Bepaal alle morfismen in de Galoisgroep $G = \mathrm{Gal}(p(x))$ van $p(x)$.
3. Toon aan dat G niet commutatief is.
4. Bepaal alle deelvelden van het vasteveld $E^{Z(G)}$ waarbij $Z(G)$ het centrum van G is (je mag gebruiken dat $|Z(G)| = 2$).

Vraag 4. Zij K een veld en E/K een Galoisuitbreiding van graad 200. Toon aan dat er een deelveld $K \subsetneq F \subsetneq E$ bestaat met F/K Galois en $\mathrm{Gal}(E/F)$ commutatief.