Examen Algebra II – 12 juni 2015

Belangrijke opmerking. Leg je antwoorden zorgvuldig uit. Geef duidelijk aan welke resultaten uit de cursustekst je gebruikt en geef een precieze referentie. *Elk vraag* moet *op een apart blad* worden beantwoord. Vergeet niet om op elk antwoordblad je naam te schrijven, en de bladen te nummeren.

Vraag 1. (3 punten) Zij L/K een Galoisuitbreiding van graad $\mathbf{2015} = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Toon aan dat er een keten van velduitbreidingen $K \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq L$ bestaat zodat K_1/K, K_2/K_1 en L/K_2 Galoisuitbreidingen zijn.

Vraag 2. (7 punten) Zij $\alpha = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

1. Bepaal de minimale veelterm $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ van α over $\mathbb{Q}$.
2. Bepaal het ontbindingsveld $E \subset \mathbb{C}$ van $p(x)$ over $\mathbb{Q}$. Is $\mathbb{Q}(\alpha)$ Galois over $\mathbb{Q}$?
3. Geef alle elementen van $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Met welke gekende groep is $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ isomorf?
4. Hoeveel deelvelden $K \subset E$ zijn er met $[K : \mathbb{Q}] = 4$?
5. Toon aan dat α construeerbaar is. Je mag hierbij alle resultaten uit het practicum gebruiken.

Vraag 3. (5 punten) In deze vraag beschouwen we steeds presentaties van G als *groep*, dus *niet* als abelse groep.

1. Zij $G = (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$. Waar of niet waar? Bewijs je antwoord.
   (a) De groep G heeft een presentatie $\langle S \mid R \rangle$ met S een oneindige verzameling.
   (b) De groep G heeft een presentatie $\langle S \mid R \rangle$ met S eindig en R oneindig.
   (c) De groep G heeft een presentatie $\langle S \mid R \rangle$ met $|S| = 1$.
2. Toon aan dat elke eindige groep een eindige presentatie heeft.

Vraag 4. (5 punten) Zij I een verzameling en $G_i, i \in I$ abelse groepen. De *directe som* van de groepen G_i is de groep

$$\oplus_{i\in I} G_i = \left\{ (g_i \mid i \in I) \,\middle|\, g_i \in G_i \text{ en } g_i = 1 \,\forall i \in I \text{ op een eindig aantal na} \right\}$$

waarbij de groepsbewerking componententswijs gedefinieerd wordt. Voor elke j in I noteren we met $\pi_j : G_j \to \oplus_{i\in I} G_i$ het groepsmorfisme dat $x \in G_j$ afbeeldt op $(g_i \mid i \in I)$ met $g_j = x$ en $g_i = 1$ voor $j \neq i$. Toon aan:

1. Zij H een abelse groep en $f_i : G_i \to H$, $i \in I$, groepsmorfismen. Dan bestaat er een uniek groepsmorfisme $f : \oplus_{i\in I} G_i \to H$ zodat $f \circ \pi_i = f_i$ for alle i in I.

2. De groep $\oplus_{i\in I} G_i$ is isomorf met de verabelsing van het vrij product $\coprod_{i\in I} G_i$. Maak voor je antwoord gebruik van de universele eigenschappen van de verabelsing en het vrij product.

Veel succes!