

**Examen G0U13C Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica**

donderdag 20 januari 2022, 8:00–11:00

De Nayer GBDN.01.A074 (71 studenten)

200C.01.05 (8 studenten met faciliteiten, 8:00-12:00)

Naam:

- Het examen bestaat uit 3 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je enkel het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt
Vraag 2: (a) 6 pt (b) 4 pt
Vraag 3: (a) 4 pt (b) 2 pt (c) 2 pt (d) 2 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 10)		L ^A T _E X opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Totaal (op 30)		EINDCIJFER (op 20)	

Vraag 1. Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie.

3pt (a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $B \subset Y$ en $C \subset Y$ geldt

$$B \subset C \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C).$$

2pt (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C) \implies B \subset C$$

niet altijd hoeft te gelden.

5pt (c) Beschouw de uitspraak

$$\forall B \in P(Y) : \forall C \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C) \implies B \subset C. \quad (1)$$

Welke bewering is juist?

- A) Uitspraak (1) geldt als en slechts als f injectief is.
- B) Uitspraak (1) geldt als en slechts als f surjectief is.
- C) A) en B) zijn allebei fout.

Bewijs uw antwoord of geef tegenvoorbeelden.

Vraag 2. Beschouw de volgende relatie R op $\text{Fun}(X)$, waarin $\text{Fun}(X)$ de verzameling van alle functies $f : X \rightarrow X$ is.

We stellen $(f, g) \in R$ als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \rightarrow X$ bestaat met

$$\sigma \circ f = g \circ \sigma.$$

6pt (a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Voor $f \in \text{Fun}(X)$ noteren we met

$$V_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

de verzameling van vaste punten van f .

4pt (b) Stel $(f, g) \in R$. Bewijs dat V_f en V_g equipotent zijn.

Vraag 3.

4pt (a) Neem aan dat de getallen $a_0, a_1, a_2, \dots$, voldoen aan

$$a_{n+1}a_{n-1} = pa_n^2, \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0$$

met $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$. Hierin is $p > 0$ een vast reëel getal. Bewijs dat

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n = p^{\binom{n}{2}}.$$

N.B. $\binom{n}{k}$ is de binomiaalcoëfficiënt.

2pt (b) Geef de ontkenning van

$$\forall x \in \mathbb{Q} : [(x < 0 \vee \exists y \in \mathbb{N} : y^2 = x) \implies (\exists z \in \mathbb{N} : z > x)]$$

zonder $\neg$ of $\implies$ te gebruiken.

Zijn de volgende verzamelingen eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar? Licht uw antwoord toe. Een formeel bewijs wordt niet gevraagd.

2pt (c) De verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$.

2pt (d) De verzameling van eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$:

$$\{A \in P(\mathbb{N}) \mid |A| < +\infty\}.$$