

**Examen G0U13B Bewijzen en Redeneren
Bachelor Wiskunde + TWIN**

**donderdag 20 januari 2022, 8:00–11:00
De Nayer GBDN.01.A074 (59 studenten)**

200C.01.05 (9 studenten met faciliteiten, 8:00-12:00)

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 vragen.
- Voor iedere vraag is een aparte bundel voorzien. In elke bundel noteer je enkel het antwoord op de bijbehorende vraag. Je mag hiervoor zowel de voor- als achterkant van de bladen in de bundel gebruiken.
- Zet je naam op elk blad.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
Vraag 1: (a) 3 pt (b) 2 pt (c) 5 pt
Vraag 2: (a) 6 pt (b) 4 pt
Vraag 3: (a) 4 pt (b) 6 pt
Vraag 4: (a) 4 pt (b) 2 pt (c) 4 pt
- Succes!

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 10)		Totaal (op 40)	
Vraag 2 (op 10)		L ^A T _E X opdracht (op 20)	
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	
Vraag 4 (op 10)			
Totaal (op 40)		EINDCIJFER (op 20)	

Vraag 1 Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie.

3pt (a) Bewijs dat voor deelverzamelingen $B \subset Y$ en $C \subset Y$ geldt

$$B \subset C \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C).$$

2pt (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C) \implies B \subset C$$

niet altijd hoeft te gelden.

5pt (c) Beschouw de uitspraak

$$\forall B \in P(Y) : \forall C \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C) \implies B \subset C. \quad (1)$$

Welke bewering is juist?

- A) Uitspraak (1) geldt als en slechts als f injectief is.
- B) Uitspraak (1) geldt als en slechts als f surjectief is.
- C) A) en B) zijn allebei fout.

Bewijs uw antwoord of geef tegenvoorbeelden.

Vraag 2 Beschouw de volgende relatie R op $\text{Fun}(X)$, waarin $\text{Fun}(X)$ de verzameling van alle functies $f : X \rightarrow X$ is.

We stellen $(f, g) \in R$ als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \rightarrow X$ bestaat met

$$\sigma \circ f = g \circ \sigma.$$

6pt (a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

Voor $f \in \text{Fun}(X)$ noteren we met

$$V_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

de verzameling van vaste punten van f .

4pt (b) Stel $(f, g) \in R$. Bewijs dat V_f en V_g equipotent zijn.

Vraag 3

- 4pt (a) Zoals bekend verandert de betekenis van een uitspraak in het algemeen als de kwantoren van plaats veranderen. We vragen ons af welke reële rijen $(a_n)_n$ voldoen aan

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists L \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Voldoen alle convergente rijen hier aan? Zijn er ook divergente rijen die hieraan voldoen? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- 6pt (b) Bewijs met behulp van de ε - n_0 definitie dat de rij $(a_n)_n$ met

$$a_n = n \left(\sqrt{n^2 + p} - n \right)$$

convergent is. Hierin is $p \geq 0$ een vast gekozen reëel getal. Wat is de limiet?

Vraag 4 Gegeven zijn twee begrensde reële rijen $(a_n)_n$ en $(b_n)_n$. Definieer

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{als } n \text{ even is,} \\ b_n & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

4pt (a) Bewijs dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \right\}.$$

2pt (b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid niet hoeft te gelden.

4pt (c) Neem nu aan dat de twee rijen $(a_n)_n$ en $(b_n)_n$ convergent zijn. Bewijs dat in dat geval de rij $(x_n)_n$ convergent is als en slechts als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$