Examen Algebraïsche structuren

28 juni 2012 (namiddag)

1 Theorie (mondeling)

1. Geef en bewijs de stelling van Lagrange. Vermeld en bewijs ook de tussenresultaten.
2. Bewijs dat $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ een basis is van V^* indien $\mathcal{V} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ een basis is van een eindigdimensionale vectorruimte V.

2 Oefeningen

1. $2^{2012^{2012}} + 3^{2012^{2012}} \bmod 93$
2. Zij q een priemgetal zodat $q = 1 + 4p$ met p ook een priemgetal. Dan bestaat er een $a \in \mathbb{Z}$ zodat $a^2 \not\equiv \pm 1 \bmod q$ en $[a]_{2q} \in \mathbb{Z}_{2q}^\times$. Toon aan dat:
   - a kan geen orde 1,2 of 4 hebben.
   - $a^k \equiv 1 \bmod 2q \Rightarrow p \mid k$
3. Geef de rang en signatuur van de kwadratische vorm

   $$Q : V \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \longmapsto -x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz$$

   met $V = \mathbb{R}^0$. Geef ook een basis zodat de matrix van de bilineaire vorm $< \cdot, \cdot >$ een Sylvester vorm heeft.