

ALGEBRA II  
(15/01/2010 (14u-18u))

- [1] Beargumenteer nauwkeurig de volgende tussenstappen.
- (a) Bekijk het bewijs van de Tweede Isomorfisme-stelling (Stelling 2.1.5). Waarom heeft  $p^\sigma(x)$  een wortel in  $E'$ ?
  - (b) Bekijk het bewijs van het Lemma van Dickson in de nota's over Gröbnerbasissen. Waarom bestaat er voor elke  $\alpha \in A$  een minimaal element  $\beta \in B$  met  $\beta \leq \alpha$ ?
- [2] Zij  $a, b, c \in \mathbb{N}$  en beschouw  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{a + b\sqrt{c}})$ .
- (a) Toon aan dat  $E$  Galois is over  $\mathbb{Q}$  als en slechts als  $c$  een volkomen kwadraat is of  $a^2 - b^2c$  een kwadraat is in  $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$ .
  - (b) Geef concrete waarden van  $a, b, c$  zodat  $G(E, \mathbb{Q})$  de structuur heeft van respectievelijk  $\mathbb{Z}_1$  (de triviale groep),  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  en  $\mathbb{Z}_4$ .
- [3] Zij  $E_1, E_2 \subset F$  velden en  $[F : E_1 \cap E_2] < \infty$ . Zij  $E_1E_2$  het kleinste deelveld van  $F$  dat  $E_1$  en  $E_2$  bevat. Stel dat  $E_2$  Galois is over  $E_1 \cap E_2$ .
- (a) Bewijs dat  $E_1E_2$  Galois is over  $E_1$ .
  - (b) Bewijs dat het projectiemorfisme

$$\varphi : G(E_1E_2, E_1) \rightarrow G(E_2, E_1 \cap E_2) : \sigma \mapsto \sigma|_{E_2}$$

goed gedefinieerd en bijectief is. (Hint: toon eerst aan dat  $\varphi$  injectief is en beschouw dan het vasteveld van  $E_2$  onder de werking van het beeld van  $\varphi$ .)

- [4] Zijn volgende uitspraken waar of niet waar? Bewijs je antwoord!

- (a) In  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  geldt

$$x - yz \in \langle x^2 + 2xy^2 - 2y^3z - y^2z^2, xy + xz - y^2z - yz^2 \rangle.$$

- (b) Elk maximaal ideaal  $M$  van  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  is van de vorm  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$  voor zekere  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ .
- (c) Stel dat  $\succ_x$  een monomenordening op  $F[x_1, \dots, x_n]$  is en dat

$$\varphi : F[x_1, \dots, x_n] \rightarrow F[y_1, \dots, y_{n'}]$$

een ringsmorfisme is dat monomen op monomen afbeeldt. Dan bestaat er een monomenordening  $\succ_y$  op  $F[y_1, \dots, y_{n'}]$  zodat voor alle monomen  $m, m' \in F[x_1, \dots, x_n]$  geldt dat  $m \succ_x m'$  als en slechts als  $\varphi(m) \succ_y \varphi(m')$ .

- (d) Als  $I_1$  en  $I_2$  monomiale idealen zijn in  $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , dan is  $I_1 \cap I_2$  ook een monomiaal ideaal.