Algebra I

(27/01/2009 (13u-18u))

Theorie

$\boxed{1}$ (a) Zij $G, *$ een groep en $N \lhd G$. Bewijs dat $\overline{*} : G/N \times G/N \to G/N : (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x * y}$ goed gedefinieerd is.

(b) Waar of niet? Als G cyclisch en N een deelgroep van G is, dan is G/N cyclisch.

$\boxed{2}$ Zij $K \subset E$ een velduitbreiding en $u \in E$ algebraïsch over K.

(a) Bewijs dat $K(u) \cong K[X]/(f)$ waarbij f de minimale veelterm van u over K is.

(b) Bewijs dat $1, u, u^2, \ldots, u^k$ lineair onafhankelijk zijn over K, waarbij je k zo groot mogelijk neemt.

$\boxed{3}$ Zij V een eindigdimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte met (Hermitisch) inproduct en $A : V \to V$ een lineaire transformatie. Bewijs dat $(A^*)^* = A$.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Waar of niet waar? Geef voldoende uitleg.

(a) Zij G_1, G_2, H_1, H_2 groepen zodat $G_1 \oplus G_2$ isomorf is met $H_1 \oplus H_2$. Dan is $G_1 \cong H_1$ en $G_2 \cong H_2$, of, $G_1 \cong H_2$ en $G_2 \cong H_1$.

(b) Zij G_1 en G_2 groepen met normaaldelers $N_1 \lhd G_1$ en $N_2 \lhd G_2$. Dan is $N_1 \oplus N_2$ een normaaldeler van $G_1 \oplus G_2$.

$\boxed{2}$ Zij F een veld.

(a) Toon aan dat $R = \{f \in F[X] \mid f'(0) = 0\}$ een deelring is van $F[X]$. Geef een ideaal $I \lhd R$ van de vorm (X^i, X^j) met $i, j \in \mathbb{N}$ dat geen hoofdideaal is. De ring R is dus geen HID. Toon aan dat R zelfs geen UFD is.

(b) Toon aan dat de ringen

$$R_0 = \{f \in F[X] \mid f(0) = 0\} \qquad \text{en} \qquad R_1 = \{f \in F[X] \mid f(1) = 0\}$$

isomorf zijn.

$\boxed{3}$ Zij $f(X) = X^2 + 2X + 4$.

(a) Zij E het ontbindingsveld van f over $\mathbb{Q}$. Bepaal $[E : \mathbb{Q}]$.

(b) Toon aan dat f irreducibel is over $\mathbb{Z}_5$. Beschouw het veld $F = \mathbb{Z}_5[T]/(f(T))$. Hoeveel elementen telt F? Geef de twee wortels van f in F. Schrijf $\overline{T+1}^{2009}$ als $\overline{aT + b}$ met $a, b \in \mathbb{Z}_5$.

$\boxed{4}$ Zij $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & -2 \\ 0 & i + 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 + i \end{pmatrix}.$$

Bepaal een inverteerbare matrix P en een Jordanmatrix J zodat $J = P^{-1}AP$.